Элементы теории риска.

4.09

Функция полезности
(Utility function)

Р-м сначала след. игру XIX в (доп. гл. мат. ст.)

Пусть игроку предлагается за 10 коп принять участие в след. игре: бросается 6 прав. игральных костей, если выпадает 6 или 36 очков, то получает 78 р, если выпад. 7 или 35, то 24 р, если выпад. 8 или 34, то 4 р, в остальных случаях 0. Стоит ли игроку участвов. в такой игре?

Приведем типичные рассужд., показывающ, что в этой игре ему участвовать не стоит.

Обозначим X - случ. велич. выигрыша. Тогда это дискретная с.в., принимающ. значения: 78, 24, 4, 0 с вероятност.

$\mathbb{P}(X=78) = \frac{2}{6^6} \approx 0{,}000043$

$\mathbb{P}(X=24) = \frac{12}{6^6} \approx 0{,}00026$

$\mathbb{P}(X=4) = \frac{42}{6^6} \approx 0{,}0009$

$\mathbb{P}(X=0) = 1 - \mathbb{P}(X=78) - \mathbb{P}(X=24) - \mathbb{P}(X=4)$

Физ. смысл мат. ожид. $\mathbb{E}X$ это среднее знач. с.в. X т.е. это средний выигрыш игрока в этой игре.

Найдём его.

$$\mathbb{E}X = 78 \cdot \mathbb{P}(X=78) + 24 \cdot \mathbb{P}(X=24) + \\ + 4 \cdot \mathbb{P}(X=4) + 0 \cdot \mathbb{P}(X=0) \approx 0{,}0131 р \approx \\ \approx 1{,}3 к$$

Сравнивая этот ср. выигрыш с 10 к, которые требуют у игрока за участие в этой игре, получаем, что по-видимому в этой игре участвовать не стоит.

Вводимое ниже понятие ф-ции полезности служит для более гибкого или тонкого описания подобных ситуаций.

Всюду ниже буквами типа $x, y, z, \ldots$ мы будем в зависимости от сит-ции обознач. доходы или потери (неслучайные) игрока, клиента страх. фирмы, самой страх. фирмы и т.п.

Естественная упорядоч. мн-ва вещ. чисел задает отношение предпочтения на мн-ве доходов вида:

$$x \preceq y \iff x \leq y \quad (1)$$

т.е. неслучайный доход y не хуже или предпочтительней неслуч. дохода x, если он его не меньше

Всюду ниже мы принимаем соотнош. (1).

(В случ. неслуч. потерь знак нер-ва правой части (1) нужно заменить на противоположный)

Всюду ниже буквами типа $X, Y, Z, \dots$ мы будем обознач. действит. случ. велич. которые будут иметь смысл случайных доходов или потерь игроков, клиентов страх. компаний, самих страх. компаний и т. п.

При этом обычные веществ. числа мы будем отождествлять с вырожденными с.в., т.е. обычное число $x \in \mathbb{R}^1$ мы будем отождеств. с с.в. вида $X: \frac{x}{1}$, т.е. оно принимает одно значение x с вер-ю 1, т.к. все доходы или потери можно расм. как сл. величины.

При этом возникает вопрос: для случ. доходов X, Y как понимать соотношен. $X \preceq Y$, т.е. что означает, что случ. доход Y не хуже или предпочтит. случ. дохода X.

$X = X(\omega)$ и $Y = Y(\omega)$

$X \preceq Y \iff X \leq Y \ \forall \omega$ (но это редко)

Часто используется след. подход:

$$X \preceq Y \iff \mathbb{E}X \le \mathbb{E}Y \quad (2)$$

т.е. считаем, что случ. доход Y предпочт. X, если его мат. ожид. или среднее знач. не меньше мат. ожид. X.

Заметим, что к приведенной выше игре мы использовали соотношение (2). т.к. если X - выигрыш в этой игре, тогда р-м с.в. вида $Y: \begin{matrix} 0,1 \\ 1 \end{matrix}$ (это 10к)

игроку стоит играть если X предпочт. Y ($X \succeq Y$), т.е. его выигрыш предпочтит. того, что он заплатил. Если мы принимаем соотнош. (2), то последнее соотнош. эквивал. $\mathbb{E}X \ge \mathbb{E}Y$, и ~~0,013 ≥ 0,1~~ прямой подсчет к $0,013 \ge 0,1$, которое неверно. Поэтому, согласно соотнош. (2) справедл. $X \preceq Y$, и значит, играть не стоит.

Приведем теперь 2 примера, показывающих, что соотнош. (2) иногда приводит к абсурдным результатам, поэтому может применяться далеко не всегда

Пусть нам предлагается принять участие в двух играх, в которых выигрыш в $

$$X: \begin{matrix} 2500000 & 500000 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{matrix} \qquad Y: \begin{matrix} 2500000 & 500000 & 0 \\ 0{,}1 & 0{,}6 & 0{,}3 \end{matrix}$$

Любой нормальный человек предпочтет игру X игре Y, т.е. $X \succ Y$ типично, при этом имеем

$$\mathbb{E}Y = 2500000 \cdot 0{,}1 + 500000 \cdot 0{,}6 + 0 =$$
$$= 2500000\,(1 + 2 \cdot 0{,}6) > \mathbb{E}X = 500000$$

т.е. подход 2 здесь явно нарушается, т.е. он противоречит здравому смыслу

√ **Задача (*/3)**

Привести еще пример, противоречащий подходу (2), имеющий смысл.

Приведем второй пример известный как „Петербургский парадокс" (XIX век)

Р-м след. игру в $

$$X: \begin{matrix} 2 & 4 & 8 & \dots \\ 1/2 & 1/4 & 1/8 & \dots \end{matrix} \qquad \left(\frac{\frac{1}{2}}{1 - 1/2} = 1 \right)$$

т.е. мы получаем 2^k $ с вер-ю $1/2^k$

Предположим, что нам предлагают сыграть в эту игру. Мы ничего не платим за участие, но нас спрашивают, сколько бы мы заплатили, чтобы в ней не участвовать, т.е. какую фиксир. сумму мы хотим получить, чтобы не участвовать.

Ясно, что у любого человека такая конечн. сумма существует, однако, если принимать подход (2), то такой конечной суммы не существует. В этом и есть парадокс.

Итак, пусть игрок согласен на сумму $y_0 < \infty$, чтобы не участвовать. Тогда для с.в. вида $Y : \frac{y_0}{1}$ должно быть $Y \succcurlyeq X$. Если он принимает подход (2), то последнее соотношен. должно быть эквивалентно нер-ву $EY \geq EX$, которое невозможно, поскольку $EY = y_0 < \infty$, а $EX = \sum_{k=1}^{\infty} 2^k \cdot \frac{1}{2^k} = \sum_{k=1}^{\infty} 1 = +\infty$, т.е. ни при каком конечном знач. y_0, подход (2) не справедлив.

Для разрешения этого парадокса необходимо изменить подход (2), а это и делается с помощью введения ф-ции полезности.

Опр. 1 Предположим, что на некотором мн-ве случ. величин задано отношение предпочтения, т.е. $\forall$ две с.в. из этого мн-ва можно сравнить с помощью этого предпочтения. Говорят, что на этом мн-ве задана ф-ция полезности $u(X)$, согласованная с этим отношением (предпочтения), ~~они~~ если $\forall$ с.в. X, Y из этого мн-ва справедливо

$$X \preceq Y \iff \mathbb{E}u(X) \leq \mathbb{E}u(Y)$$
$$X \prec Y \iff \mathbb{E}u(X) < \mathbb{E}u(Y)$$
$$X \sim Y \iff \mathbb{E}u(X) = \mathbb{E}u(Y)$$

Заметим, что соотнош. (2) явл. частн. случаем опред. 1 при $u(x) = x$

Всюду ниже мы будем предполагать, что у игроков есть ф-ция полез-ти $u(x)$ и они оценивают риски с ~~пол-ю~~ помощью опр. 1.

Ниже будет приведен пример, показыв., что ф-ции полезности в смысле опред. 1 не существует ~~и предположения~~ в предположении, что у игрока ф-я пол-и сущ-ет. Ниже будут приведены ~~пример~~ эмпирические алгоритмы, позволяющие ее определить.

Разрешение „Питер. парадокса" состоит, например, в изменении (2). Р-м другую ф-ю полезности, например,

$u(x) = \log x$

Тогда в обознач. парадокса имеем

$$X \preceq Y \iff \{\text{опр } 1\} \iff \mathbb{E}\,u(X) \le \mathbb{E}\,u(Y) \iff$$

$$\{u(x) = \log x\} \iff \mathbb{E}\log X \le \mathbb{E}\log \underset{\{Y:\ \frac{y_0}{1}\}}{Y} = y_0$$

(конкретно $y_0 \ge 4$ ₽)

$$\mathbb{E}\log X = \sum_{k=1}^{\infty} \log 2^k \frac{1}{2^k} = \log 2 \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{2^k}\right) =$$

$$= \log 2 \left(\sum_{k=1}^{\infty} x^k\right)'_x \Bigg|_{x=1/2} \cdot \frac{1}{2} = \log 2 \left(\frac{x}{1-x}\right)'_x \Bigg|_{x=1/2} \cdot \frac{1}{2} =$$

$$= \log 2 \cdot \frac{1}{(1-x)^2}\Bigg|_{x=\frac{1}{2}} \cdot \frac{1}{2} = \frac{4}{2}\log 2 = 2\log 2$$

Теперь последн. нер-во приобретает вид

$$2\log 2 \le \log y_0 \implies y_0 \ge 4$$

Таким образом, игрок с логарифм. ф-ей полезн-ти согласен на любую сумму не меньше 4 ₽, чтобы не участвовать в игре X.

$\boxed{11.09.}$

Заметим, что из опр. 1 в общем случае не следует соотношения

$$X \preceq Y \not\Rightarrow aX \preceq aY, \ \forall a > 0$$

$$X \preceq Y \not\Rightarrow b + X \preceq b + Y, \ \forall b \in \mathbb{R}^1$$

Величина $u(x)$ обычно интерпр. как „вес“ или „полезность“, которые игрок или

клиент приписывает неслуч. доходу x
Заметим также что пример: $u(x) = x$
показывает, что ф-я пол-ти может быть отрицательной.
Доказываемая ниже теорема показывает, что в смысле опр1 данная ф-я пол-ти $u(x)$ и $\forall$ ф-я вида $au(x)+b$ $\forall a>0$ и $\forall b \in R^1$ в смысле этого опр эквивалентны.

Th 1: Пусть ф-я полез-ти $u(x)$ описывает или согласована с отношением предпочтения $\preceq$ в смысле опр 1. Тогда $\forall a>0$ и $\forall b \in R^1$ ф-я $au(x)+b$ также описывает или согласована это отношение предпочт. $\preceq$

Д-во: необходимо проверить 3 условия опр 1. поскольку они проверяются одинаково р-м только первое усл. $X \preceq Y \Leftrightarrow \mathbb{E}u(X) \le \mathbb{E}u(Y)$

$$X \preceq Y \Leftrightarrow \{\text{по опр } 1\} \Leftrightarrow \mathbb{E}u(X) \le \mathbb{E}u(Y) \Leftrightarrow$$
$$\{\forall a>0\} \Leftrightarrow a\mathbb{E}u(X) \le a\mathbb{E}u(Y) \Leftrightarrow \{\forall b \in R^1\}$$
$$\Leftrightarrow a\mathbb{E}u(X)+b \le a\mathbb{E}u(Y)+b \Leftrightarrow \left\{\begin{matrix}\text{лин-сть}\\ \text{мат.}\\ \text{ожид.}\end{matrix}\right\}$$
$$\Leftrightarrow \mathbb{E}(au(X)+b) \le \mathbb{E}(au(Y)+b)$$

Сравнивая левую и правую часть этих соотнош.

в силу опр 1. получаем, что ф-я $au(x)+b$ так же явл. ф.п., описывающ. то же самое отношение предпочтения ■

Обычно используют ф.п. вида

$$u(x)=ax+b;\quad u(x)=a\log x+b;\quad \forall a>0,\ \forall b\in\mathbb{R}$$

$$u(x)=ae^{x}+b;\quad u(x)=ax^{\alpha}+b,\ \alpha>0\ \ldots$$

Заметим, что все эти ф.п. не убывают. Доказываемая ниже теор. показывает, что это свойство неслучайно.

Th2: Если выполнено соотношение (1), то ф-я полезности не убывает, т.е. $u(x)\uparrow$

Д-во: $x_1\le x_2 \Leftrightarrow \{(1)\} \Leftrightarrow x_1 \preceq x_2 \Leftrightarrow$

$$\left\{\begin{matrix} X_1: \frac{x_1}{1} \\ X_2: \frac{x_2}{1}\end{matrix}\right\} \Leftrightarrow X_1 \preceq X_2 \Leftrightarrow \{\text{опр } 1\} \Leftrightarrow$$

$$\mathbb{E}u(X_1)\le \mathbb{E}u(X_2) \Leftrightarrow u(x_1)\le u(x_2)$$

$\Rightarrow u(x)\uparrow$ ■

(Если ф.п. с участком постоянства, то в обратную сторону не работает. Почему? Может ли у ф.п. быть участок пост-ва)

Доказываемая теор. показывает, что если ф.п. дифф-ма, ~~и~~ ~~[illegible]~~ то для нее естественно условие $u'(x) \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^1$

(может быть с разрывом)

всплеск радости

Приведем теперь типичное рассужд., позволяющие эмпирически получить ф-ии полез-ти указанного выше вида

Th 3: Пусть $\Delta x \to 0$ – приращение дохода, а $u(x+\Delta x) - u(x)$ – приращение полез-ти при переходе от дохода x к доходу $x + \Delta x$. $\exists u'(x)$ Тогда 1) если приращ. полез-ти пропорцион. приращ. дохода, т.е.

$u(x+\Delta x) - u(x) = a\Delta x \Rightarrow u(x) = x \quad \forall a > 0$

2) Если приращ. пол-ти пропорц. относит. приращ. дохода, т.е.

$u(x+\Delta x) - u(x) = a\frac{\Delta x}{x} \to u(x) = \log x$

3) если относит. приращ. пол-ти пропорц. приращ. дохода, т.е.

$\frac{u(x+\Delta x) - u(x)}{u(x)} = a\Delta x \Rightarrow u(x) = e^{ax}$

4) если $\frac{u(x) + \Delta x) - u(x)}{u(x)} = a\frac{\Delta x}{x}$

$\Rightarrow u(x) = x^a$

$\forall a > 0$

Заметим, что все ф-ции получ-ые из этой теоремы согласно теор. 1 можно умножить на $\forall a>0$ и прибавить $\forall b \in \mathbb{R}^1$.

Д-во: $\forall x$, $\Delta x \to 0$

1) $\dfrac{u(x+\Delta x)-u(x)}{\Delta x} = a \; \{\Delta x \to 0\} \Rightarrow u'(x) = a \Rightarrow$

$u(x) = \int a\,dx = ax + b$

2) $\dfrac{u(x+\Delta x)-u(x)}{\Delta x} = \dfrac{a}{x} \Rightarrow \{\Delta x \to 0\} \Rightarrow$

$u'(x) = \dfrac{a}{x} \Rightarrow u(x) = \int \dfrac{a}{x}dx = a\log x + b$

3) $u'(x) = au(x) \Rightarrow \dfrac{du}{dx} = au \Rightarrow \dfrac{du}{u} \equiv a\,dx$ тоже д-во!

$\Rightarrow \int \dfrac{du}{u} = \int a\,dx \Rightarrow \log u = ax + c \Rightarrow$

$\Rightarrow u(x) = e^{ax+c}$

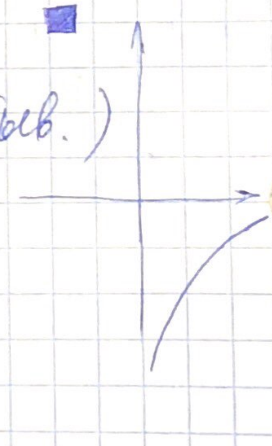
4) $u'(x) = a\dfrac{u}{x} \Rightarrow \dfrac{du}{u} = a\dfrac{dx}{x} \Rightarrow$

$\Rightarrow \int \dfrac{du}{u} = \int a\dfrac{dx}{x} \Rightarrow \log u = a\log x + c \Rightarrow$

$\Rightarrow u(x) = d \cdot x^a$, $d>0$, $a>0$ ■

ф.п. $u(x) = -e^{-x}$ (– для не убыв.)

хорошая, потому что выпуклость вверх



Приведем теперь пример, показывающий, что в некоторых случаях в смысле опр 1 ф-ии пол-ти не существует.

Это парадокс Алле (Allais)

С этой целью докажем след. теорему

Th 4: Пусть дискретн. сл. вел. X и Y принимают одинаковые 3 значения, но быть может с разными вер-ями, т. е. имеют вид: $X: \begin{matrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ p_1 & p_2 & p_3 \end{matrix}$; $Y: \begin{matrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ q_1 & q_2 & q_3 \end{matrix}$

$p_i, q_i > 0 \quad \sum p_i = 1 \quad \sum q_i = 1$

Тогда если $\exists$ ф.п. $u(x)$ описывающ. отношен. предпочт. $\preceq$ между этими с.в. ~~[illegible]~~ в смысле опр 1, то это $\preceq$ зависит лишь от $p_1 - q_1$; $p_2 - q_2$ ~~[illegible]~~ (при фиксир. x_1, x_2, x_3 и ф.п. $u(x)$)

Эта теорема означает, что если есть 2 пары, указанных в теореме с.в., приним. одинаковые 3 значения, и если для этих пар р-ти $p_1 - q_1$, $p_2 - q_2$ одинак-вы, то отнош. ~~[illegible]~~ предпочт. между этими парами также одинаково

Д-во: проверим (1) условие из опр. 1 и убедимся, что оно зависит лишь от указ. разн-тей, остальные усл. провер. аналог.

Пусть, например, $X \preceq Y \iff \{\text{опр } 1\} \iff$

$\mathbb{E}u(X) \le \mathbb{E}u(Y) \iff$ ~~$u(x_1)p_1 + u(x_2)p_2 + u$~~

$u(x_1)p_1 + u(x_2)p_2 + u(x_3)p_3 \le u(x_1)q_1 + u(x_2)q_2 + u(x_3)q_3$

$\iff u(x_1)(p_1 - q_1) + u(x_2)(p_2 - q_2) + u(x_3)(p_3 - q_3) \le 0$

$\iff \left\{\begin{array}{l} p_1 + p_2 + p_3 = 1 \\ p_3 = 1 - p_1 - p_2 \\ q_3 = 1 - q_1 - q_2 \end{array}\right\} \iff u(x_1)(p_1 - q_1) + u(x_2)(p_2 - q_2) -$

$- u(x_3)((p_1 - q_1) + (p_2 - q_2)) \le 0$

при этом л.ч. указ. нер-ва зависит лишь от указ. раз-тей, а это и означает утв. теоремы. ∎

Р-м теперь парадокс Алле:

Пусть нам предлагают выбрать одну из след. игр (выигрыш в $):

X_1:	2500000	500000	0
	0	1	0
Y_1:	2500000	500000	0
	0,1	0,89	0,01

Многие предпочт. первую игру X_1, т.е. обычно считают $X_1 \succcurlyeq Y_1$

Р-м еще 2 игры

X_2:

2500000	500000	0
0	0,11	0,89

Y_2:

2500000	500000	0
0,1	0	0,9

Поскольку вер-ти 0,1 и 0,11 близки, то обычно предпоч. вторую игру, т.е. $Y_2 \succcurlyeq X_2$, что противореч. последней теор., т.к. для первой ~~игры~~ пары

$p_1 - q_1 = -0,1$
$p_2 - q_2 = 0,11$

для второй пары

$p_1 - q_1 = -0,1$
$p_2 - q_2 = 0,11$

поэтому отнош. предпочт. должно быть одинаковым у этих пар, т.е. согласно последн. теореме $X_1 \succcurlyeq Y_1 \Rightarrow X_2 \succcurlyeq Y_2$, что противоречит здравому смыслу, т.е. в этом примере в смысле опр 1 не сущ. ф.п. никакой

18.09

Предположим, что игрок или клиент имеет ф.п. $u(x)$, описывающую его отношение к риску, и предположим, что X случайные потери или доход этого игрока.

Предположим, что игрок вместо с.в. X взять <u>число</u>. Как это разумно сделать, показывает след. опр.

<u>Опр. 2</u> Пусть X – с.в., $u(x)$ – ф.п. Тогда число c_X^* или c^* наз-ся <u>детерминированным эквивалентом</u> X, если оно удовл. рав-ву $u(c_X^*) = \mathbb{E}u(X)$, которое означает, что $c_X^* \sim X$.

Таким образом, если мы хотим вместо с.в. X взять число, то разумным числом явл. детермин. эквивал. c_X^*, который означает, что это число в смысле опр. 1 эквив. X. Если интерпр. с.в. X как акцию или ц.б., приносящую случайный доход, то детермин. эквив. c_X^* обычно интерпр. как ее цена.

Th 5. 1. Пусть с.в. X вырождена, т.е. имеет вид $X : \begin{matrix} x_0 \\ 1 \end{matrix}$ и ф.п. $u(x)\uparrow$ строго возрастает. Тогда детерм. эквив. $C_X^* = x_0$

2. Пусть $u(x) = -e^{-\beta x}$, $\beta > 0$, и X имеет экспон. плотность вида $p(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$, $\lambda > 0$

Тогда детерм. эквив. $C_X^* = \frac{1}{\beta} \log \frac{\lambda+\beta}{\lambda}$

3. Если $u(x) = -e^{-\beta x}$, то для $\forall$ с.в X, Y справедливо соотношение

$$X \preccurlyeq Y \iff b + X \preccurlyeq b + Y, \ \forall b \in \mathbb{R}^1$$

умножать на $a>0$ нельзя!!

Д-во: 1. $u(C_X^*) = \mathbb{E}u(X) = \left\{ X : \begin{matrix} x_0 \\ 1 \end{matrix} \right\} = u(x_0)$.

$\Rightarrow \left\{ \begin{matrix} u(x)\uparrow \\ \text{строго} \end{matrix} \right\} \Rightarrow C_X^* = x_0$

$\left\{ \begin{matrix} \text{если } C_X^* < X_0 \overset{\text{стр. возр}}{\Longrightarrow} u(C_X^*) < u(X_0) \\ C_X^* > X_0 \Rightarrow u(C_X^*) > u(X_0), \text{ чего не м.б.} \end{matrix} \right\}$

2. $u(C_X^*) = \mathbb{E}u(X) = \{X \sim p(x)\} = \int u(x)p(x)dx =$

$= -\int_0^\infty e^{-\beta x} \lambda e^{-\lambda x} dx = -\lambda \int_0^\infty e^{-x(\beta+\lambda)} dx =$

$= \frac{\lambda}{\lambda+\beta} e^{-x(\beta+\lambda)} \Big|_0^\infty = 0 - \frac{\lambda}{\lambda+\beta} = -\frac{\lambda}{\lambda+\beta}$

$\Rightarrow -e^{-\beta C_X^*} = -\frac{\lambda}{\lambda+\beta}$

$-\beta C_X^* = \ln \frac{\lambda}{\lambda+\beta}$

$C_X^* = -\frac{1}{\beta} \ln \frac{\lambda}{\lambda+\beta} = \frac{1}{\beta} \ln \frac{\lambda+\beta}{\lambda}$

3. $b + X \preccurlyeq b + Y \iff \{\text{опр } 1\} \iff$

$\mathbb{E}u(b+X) \leq \mathbb{E}u(b+Y) \iff \{u(x) = -e^{-\beta x}\} \iff$

$\mathbb{E}\left(-e^{-\beta(b+X)}\right) \leq \mathbb{E}\left(-e^{-\beta(b+Y)}\right) \iff$

$e^{-\beta b}\mathbb{E}(-e^{-\beta X}) \le e^{-\beta b}\mathbb{E}(-e^{-\beta Y}) \iff \mathbb{E}u(X) \le \mathbb{E}u(Y)$

$\iff \{$опр 1$\} \iff X \preceq Y$ ■

Выше было отмечено, что естественным свойством ф.п. явл. её неубывание (Th 2). При этом ф.п. может не убывать по крайней мере 2-мя способами: ╱, ╭. В пер-ом случае мы говорим, что она выпукла вниз, а во втором - вверх. Дадим необход. опр.

<u>Опр 3.</u> Ф-я $g(x)$ наз-ся <u>выпуклой вниз</u> „$\cup$", если её график лежит не ниже $\forall$ касательной, проведенной к её графику. Аналогично, она наз-ся <u>выпуклой вверх</u> „$\cap$", если её график лежит не выше $\forall$ касательной.

Из анализа хорошо известно, что дост. усл. выпуклости: $g''(x) \ge 0, \forall x \Rightarrow$

$\Rightarrow g'(x)\uparrow \Rightarrow \cup$

$g''(x) \le 0, \forall x \Rightarrow g'(x)\downarrow \Rightarrow \cap$

Справедлива след. теорема:

<u>Th 6</u>: (Нер-во Йенсена)

Пусть ф-я $g(x)$ дифф-ма, т.е. $\exists g'(x)$. Тогда для $\forall$ с.в. X

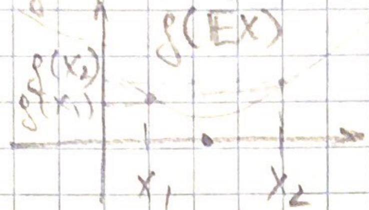
1. $g(x) \cup \Rightarrow \mathbb{E}g(X) \ge g(\mathbb{E}X)$

2. $g(x) \cap \Rightarrow \mathbb{E}g(X) \le g(\mathbb{E}X)$

$(\mathbb{E}X)^2 \le \mathbb{E}X^2$ $\quad g(x) = x^2$ $\cup$

$g(\alpha x_1 + (1-\alpha)x_2) \le \alpha g(x_1) + (1-\alpha) g(x_2)$ $\quad \forall x_1, x_2$, $\alpha \in (0,1)$

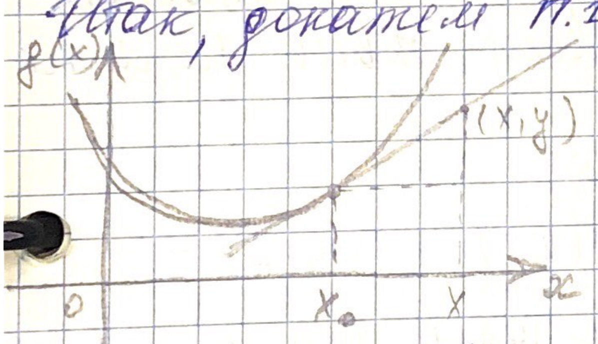
$g(\mathbb{E}X)$ $\quad g(x)$ $\quad \mathbb{E}g(x)$



Д-во: достат. д-ть только п. 1 Th, поскольку, если он доказан, а мы наход. в усл. п. 2, то ф-я $-g(x)$ выпукла вниз, и применяя к ней доказан. п. 1, получим

$$\mathbb{E}(-g(x)) \ge -g(\mathbb{E}X) \Rightarrow \mathbb{E}(g(x)) \le g(\mathbb{E}X)$$

Итак, докажем п. 1



В $\forall x_0$ график касат. к этой ф-ии имеет вид

$$\frac{y - g(x_0)}{x - x_0} = g'(x_0)$$

$$\Rightarrow y = g'(x_0)(x - x_0) + g(x_0)$$

По опр. вып. вниз имеем $g(x) \ge y$, т.е.

$$g(x) \ge g'(x_0)(x - x_0) + g(x_0) \quad \forall x, x_0$$

Поскольку здесь x и x_0 - любые, то возьмем $x := X$, $x_0 := \mathbb{E}X$, тогда имеем

$$g(X) \ge g'(\mathbb{E}X)(X - \mathbb{E}X) + g(\mathbb{E}X)$$

Беря мат. ожид. от обеих частей

$\mathbb{E} g(X) \geq \mathbb{E}\left(g'(\mathbb{E}X)(X-\mathbb{E}X)+g^*(\mathbb{E}(X))\right) =$

$= \{\text{линейность мат. ожид}\} = g'(\mathbb{E}X)\underbrace{\mathbb{E}(X-\mathbb{E}X)}_{=0} + g(\mathbb{E}X)$

$= g(\mathbb{E}X)$ ■

Возвращаемся к ф.п. $u(x)$. Получаем след. теор.

Th7. Пусть $u(x)$ дифф-ма, т.е. $\exists\, u'(x) \Rightarrow$

1. $u(x) \cup \Rightarrow \mathbb{E}u(X) \geq u(\mathbb{E}X) \Rightarrow \{\text{опр. 1}\} \Rightarrow$

$\Rightarrow X \succeq \mathbb{E}X$, т.е. игрок с такой ф.п. предпоч. случайный выигрыш X ~~неслучайн~~ числу $\mathbb{E}X$. в этом случае говорят, что у него любовь к риску (risk lover)

если $u(x)\uparrow$ строго возраст, то $c_X^* \geq \mathbb{E}X$, т.е. игрок в этом случае ~~готов согласиться~~ ~~только на~~ детермин. эквив. не меньше среднего выигрыша.

2. $u(x) \cap \Rightarrow \mathbb{E}u(X) \leq u(\mathbb{E}X) \Rightarrow \{\text{опр 1}\} \Rightarrow$

$X \preceq \mathbb{E}X$, т.е. игроку с такой ф.п. лучше не играть, чем играть, т.к. он предпочит. число $\mathbb{E}X$, в этом случае говорят, что у него отвращ. ~~в~~ к риску (risk averse)

если $u(x)\uparrow$ строго возраст., то $c_X^* \leq \mathbb{E}X$.

Док-во следует из теоремы 6.

и докажем, например, второе утв. п.1

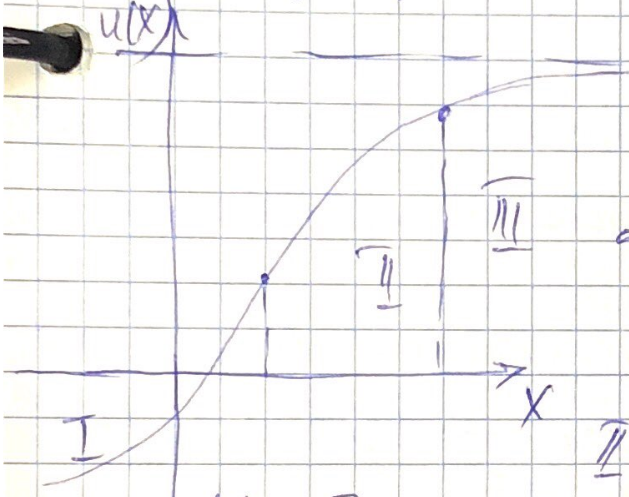
$u(X) \cup$ и $u(X)\uparrow$ (строго возраст.) $\Rightarrow \{$опр. 2$\} \Rightarrow$

$\Rightarrow u(c_X^*) = \mathbb{E}u(X) \geq \left\{\begin{matrix}\cup \\ Th6\end{matrix}\right\} \geq u(\mathbb{E}X) \Rightarrow \left\{\begin{matrix}u\uparrow \\ \text{строго}\end{matrix}\right\} \Rightarrow$

$\Rightarrow c_X^* \geq \mathbb{E}X$ (от противн.) ■

25.08.18

Эта теор. позвол. нарисовать типичную форму ф.п.



Условно разбиваем на 3 части

I зона X-ср отн-но малыми доходами здесь ф.п. $\cup$ (вып. вниз) в этой зоне risk lover

II отн-но большие доходы ф.п. $\cap$ risk-averse

III сверх высокие доходы $u(X) \approx c = const$

I $- \cup$ III $- u(x) \approx c$

II $- \cap$

$u''(x) \geq 0, \forall x \Leftrightarrow u'(x)\uparrow \Rightarrow \cup \Rightarrow$

$\mathbb{E}u(X) \geq u(\mathbb{E}X) \Rightarrow X \succcurlyeq \mathbb{E}X$ — risk lover

$u''(X) \leq 0, \forall x \; u'(X)\downarrow \Rightarrow \cap \Rightarrow \mathbb{E}u(X) \leq u(\mathbb{E}X)$

$\Rightarrow X \preccurlyeq \mathbb{E}X$ — risk-averse

$u''(x) \equiv 0 \; \forall x \Rightarrow u'(x) = c \Rightarrow u(x) = cx + b$ (?)

$\Rightarrow \mathbb{E}u(X) = \mathbb{E}(cX + b) = u(\mathbb{E}X) \Rightarrow X \sim \mathbb{E}X$

risk neutral

Т.о. знак второй производной указывает на отношен. к риску игрока или инвестора (если оно $\exists$)

Однако $u''(x)$ неинвариантна к преобраз ф.п. вида $au(x)+b$, $a>0$, $b-\forall$. Исходя из этого часто использ. след

Опр 4. $R = R(x) = \dfrac{u''(x)}{u'(x)}$ (в предп. что $u''(x)\exists$, $u'(x)\neq 0$)
$\to$ коэфф. риска

Т.о. если $R(x)\geq 0$ $\forall x$ – риск lover

$R(x)\leq 0$ $\forall x$ – risk averse

Поскольку считают, что $u'(x)>0$, заметим

Th 8. 1) $R(x)$ инв. отн неинв. преобр. ф.п. $au(x)+b$, $a>0$ $\forall b$

2) класс ф.п. для некоторых $R(x)=const$ $\forall x$ с точки до лин преобраз. совпадает с классом ф.п. вида $e^{\gamma x}$, $e^{-\gamma x}$, x, $\gamma>0$

Д-во:

$\triangleright$ 1) $\dfrac{(au(x)+b)''}{(au(x)+b)'} = \dfrac{au''(x)}{u'(x)} = R(x)$

2) $R(x)\equiv c \to \dfrac{u''}{u'}=c \to \{u'=z\} \to \dfrac{z'}{z}=c$

$\to \int\dfrac{dz}{z} = \int c\,dx \to \ln z \overset{def}{=} \log z = cx+d$

$z = ae^{cx}$ $a>0$

$u = ae^{cx} \to u = a\int e^{cx}dx = \begin{cases} \frac{a}{c}e^{cx}+b & c\neq 0 \\ ax+b, & c=0 \end{cases}$

$(\gamma = c>0,\ \gamma = -c,\ c<0)$

$\blacksquare$

Страхование со стороны клиента

Р-м клиента страховой фирмы, который имеет начальный капитал S, который страдает от случайных потерь X, который имеет ф-цию полезности $u(x)$, которая хар-ет его отношение к риску, и который готов заплатить страх. фирме за полное предотвращ. случайных потерь фирме ~~сл~~ величину G.

Используя соотношение $\preceq$ величины S, X, G связаны соотношением

(сокращ. нельзя)

$$S - X \preceq S - G$$

Используя определ. ф-ии полезности последн. соотношен. эквивал. нер-ву

$$\mathbb{E}u(S-X) \leq u(S-G)$$

поскольку ф-я полезности u не убывает, то с ростом G правая часть убывает.

$\exists\, G_{max}: \quad \mathbb{E}u(S-X) = u(S-G_{max})$

В этом случае клиенту стоит участвов. в страх. $\forall G \leq G_{max}$ (Заметим, что $S-G_{max}$ явл. детермин. эквив. для $S-X$, т.е. $C^*_{S-X} = S-G_{max}$)

Предположим, что ф-я полезности $u(x)$ клиента строго возрастает и выпукла вниз (любовь ~~отвращ.~~ к риску), тогда, по опр. G_{max}, имеем

$$u(S - G_{max}) = \mathbb{E}u(S - X) \geq \left\{ \begin{matrix} Th\,6: \\ x := S - X \\ g(x) = u(x) \cup \end{matrix} \right\} \geq$$

$$\geq u(\mathbb{E}(S - X)) = u(S - \mathbb{E}X) \Rightarrow \left\{ \begin{matrix} u \uparrow \\ \text{строго!} \end{matrix} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow S - G_{max} \geq S - \mathbb{E}X \Rightarrow \boxed{G_{max} \leq \mathbb{E}X}$$

Аналогично, если у клиента отвращ. к риску, т.е ф.п. выпукла вверх, то

$$\boxed{G_{max} \geq \mathbb{E}X}$$

Страхование со стороны страховой компании

Пусть страх. комп. имеет нач. капитал S_I ф-ию полезности $u_I(x)$, которая характер. ее отношен. к риску, и которая за предотвращ. случ. потери клиента X готова с него получать H

Использ. соотношен. предп. $\preceq$ по смыслу вел. S_I, X, H связано соотношен.

$$S_I \preceq S_I - X + H$$

по опр. фии полезн. это соотн. эквив. нер-ву

$$u_I(S_I) \leq \mathbb{E}u_I(S_I - X + H)$$

Поскольку ф-я полезн. $u_I(x)$ не убывает, то с уменьшен. H правая часть этого нер-ва уменьшается.

Предположим, что существует H_{min}:

$u_I(S_I) = \mathbb{E} u_I(S_I - X + H_{min})$, т.е. детерм. эквив. $C^*_{S_I - X + H_{min}} = S_I$

Страх. комп. в рамках этой модели имеет смысл участв. в страхов. при $\forall H \geq H_{min}$

Т.о. в рамках этой модели страх. сост., если $H_{min} \leq G_{max}$, поскольку в этом случае и клиент, и страх. комп. могут выбрать платежи из отрезка $[H_{min}, G_{max}]$

В случае если $H_{min} > G_{max}$ страхов. в рамках этой модели невозможно.

Предположим, что ф.п. $u_I(x)$ строго возраст. и выпукла вниз, т.е. у страх. комп. любовь к риску, тогда по опр. H_{min} имеем

$$u_I(S_I) = \mathbb{E} u_I(S_I - X + H_{min}) \geq \{\text{Тh } 6\} \geq$$

$$\geq u_I(S - \mathbb{E}X + H_{min}) \Rightarrow \left\{ \begin{matrix} u_I \uparrow \\ \text{строго} \end{matrix} \right\} \Rightarrow S_I \geq S_I - \mathbb{E}X + H_{m}$$

$\Rightarrow \boxed{H_{min} \le \mathbb{E}X}$ $\cup$

аналогично, если у страх. комп. ф.п. u_I выпукла вверх, т.е. у нее отвращ. к риску, то $\boxed{H_{min} \ge \mathbb{E}X}$ $\cap$

Т. о. доказана след. теорема.

<u>Th 9</u>: Пусть ф.п. $u(x)$ и $u_I(x)$ строго возраст., тогда

1) $\cup\, u(x) \cup u_I(x) \Rightarrow \begin{matrix} G_{max} \le \mathbb{E}X \\ H_{min} \le \mathbb{E}X \end{matrix} \Rightarrow ?$

2) $\cap\, u(x) \cap u_I(x) \Rightarrow \begin{matrix} G_{max} \ge \mathbb{E}X \\ H_{min} \ge \mathbb{E}X \end{matrix} \Rightarrow ?$

3) $\cup\, u(x) \cap u_I(x) \Rightarrow \begin{matrix} G_{max} \le \mathbb{E}X \\ H_{min} \ge \mathbb{E}X \end{matrix} \Rightarrow G_{max} \le H_{min}$ $\ominus$

$\Rightarrow$ типичным образом страхование невозможно

4) $\cap\, u(x) \cup u_I(x) \Rightarrow \begin{matrix} G_{max} \ge \mathbb{E}X \\ H_{min} \le \mathbb{E}X \end{matrix} \Rightarrow H_{min} \le G_{max}$ $\oplus$

2.10.18

Р-м пример, когда страхов. возможно.

<u>Th 10</u> Пусть случ. потери клиента имеют норм. распред. $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ и ф-ию полез-ти клиента и страх. комп. соответств. имеют вид: $u(x) = -e^{-\beta x}$

$u_I(x) = -e^{-\alpha x}$, $\alpha, \beta > 0$ (случай $\cap\cap$).

Тогда $G_{max} = \mu + \beta\frac{\sigma^2}{2}$, $H_{min} = \mu + \alpha\frac{\sigma^2}{2}$ и страх. возможно, если $H_{min} \le G_{max} \Leftrightarrow \alpha \le \beta$

Д-во:

Из теор. вер. хорошо известно выражение для хар. ф-ции норм. закона $f_X(t) \equiv \mathbb{E}e^{itX} = \{X \sim N(\mu, \sigma^2)\} = e^{it\mu - \frac{t^2\sigma^2}{2}}$

Полагая $t = -i\gamma$, получаем

$$\boxed{\mathbb{E}e^{\gamma X} = e^{\gamma\mu + \frac{\gamma^2\sigma^2}{2}}}$$

По опред. G_{max} имеем $u(S - G_{max}) = \mathbb{E}u(S - X)$

$$\Rightarrow \{u(x) = -e^{-\beta x}\} \Rightarrow -e^{-\beta(S - G_{max})} = -\mathbb{E}e^{-\beta(S-X)} =$$

$$= -e^{-\beta S}\mathbb{E}e^{\beta X} = \left\{\begin{matrix}\text{по ф-ле} \\ \gamma = \beta\end{matrix}\right\} = -e^{-\beta S}e^{\beta\mu + \frac{\beta^2\sigma^2}{2}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow e^{\beta G_{max}} = e^{\beta\mu + \frac{\beta^2\sigma^2}{2}} \Rightarrow G_{max} = \mu + \frac{\beta\sigma^2}{2}$$

аналогично для H_{min} имеем

$$U_I(S_I) = \mathbb{E}U_I(S_I - X + H_{min}) \Rightarrow$$

$$-e^{-\alpha S_I} = -\mathbb{E}e^{-\alpha(S_I - X + H_{min})} =$$

$$= -e^{-\alpha S_I - \alpha H_{min}}\mathbb{E}e^{\alpha X} = \left\{\begin{matrix}\text{в ф-ле} \\ \gamma = \alpha\end{matrix}\right\} =$$

$$= -e^{-\alpha S_I - \alpha H_{min}}e^{\alpha\mu + \frac{\alpha^2\sigma^2}{2}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow e^{\alpha H_{min}} = e^{\alpha\mu + \frac{\alpha^2\sigma^2}{2}} \Rightarrow H_{min} = \mu + \frac{\alpha\sigma^2}{2} \blacksquare$$

Получим теперь приближенные ф-лы для G_{max} и H_{min}, которые можно применять на практике.

В доказ-ве будет использоваться ф-ла Тейлора вида $f(x) = f(x_0) + (x - x_0) f'(x_0) + \frac{1}{2}(x - x_0)^2 f''(x_0) \quad \forall x, x_0$

Th 11: Пусть $\exists\, u''(x)$, тогда справедлива приближ. ф-ла: $G_{max} \approx \mathbb{E}X - \frac{1}{2} \frac{u''(S - \mathbb{E}X)}{u'(S - \mathbb{E}X)} \mathbb{D}X = \mathbb{E}X - \frac{1}{2} R(S - \mathbb{E}X) \cdot \mathbb{D}X$

Правую часть последн. ф-лы на практике можно оценить: начальн. капитал S известен, ф-я полезн. клиента $u(x)$ может быть приближ. получена с помощью методов, описан. ниже, величины $\mathbb{E}X$ и $\mathbb{D}X$ оцениваются с помощью статистики, т.е. нужны прошлые наблюдения $X_1, \ldots, X_n$ над с.в. X

Тогда можно взять $\mathbb{E}X \approx \bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$ и

$\mathbb{D}X \approx s^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2$

Д-во:

По опред. G_{max}, имеем

$u(S - G_{max}) = \mathbb{E}\, u(S - X)$

применим к обеим частям этого р-ва формулу, приведен. перед теоремой

$$u(S-G_{max}) \approx \left\{ \begin{matrix} f(x)=u(x) \\ x = S-G_{max} \\ x_0 = S-\mathbb{E}X \\ 2 \text{ чл.} \end{matrix} \right\} \approx u(S-\mathbb{E}X) +$$

$$+ (\mathbb{E}X - G_{max})\, u'(S-\mathbb{E}X)$$

$$u(S-X) \approx \left\{ \begin{matrix} f(x)=u(x) \\ x = S-X \\ x_0 = S-\mathbb{E}X \\ 3 \text{ чл.} \end{matrix} \right\} \approx u(S-\mathbb{E}X) + (\mathbb{E}X - X)u'(S-\mathbb{E}X) +$$

$$+ \frac{1}{2}(\mathbb{E}X-X)^2 u''(S-\mathbb{E}X)$$

Подставим эти ф-лы в последнее р-во, получим:

$$u(S-\mathbb{E}X) + (\mathbb{E}X - G_{max})u'(S-\mathbb{E}X) \approx$$

$$\approx \mathbb{E}\left(u(S-\mathbb{E}X) + (\mathbb{E}X-X)u'(S-\mathbb{E}X) + \frac{1}{2}(\mathbb{E}X-X)^2 u''(S-\mathbb{E}X)\right)$$

$$= u(S-\mathbb{E}X) + 0 + \frac{1}{2}\mathbb{D}X\, u''(S-\mathbb{E}X)$$

$$\Rightarrow \quad G_{max} \approx \mathbb{E}X - \frac{1}{2}\frac{u''(S-\mathbb{E}X)}{u'(S-\mathbb{E}X)}\mathbb{D}X \quad \blacksquare$$

Th 12. Пусть $\exists\, u_I''(x) \Rightarrow$

$$H_{min} \approx \mathbb{E}X - \frac{u_I'(S_I)}{u_I''(S_I)} \pm \sqrt{\left(\frac{u_I'(S_I)}{u_I''(S_I)}\right)^2 - \mathbb{D}X} \equiv$$

$$\equiv \mathbb{E}X - R_I^{-1}(S_I) \pm \sqrt{R_I^{-2}(S_I) - \mathbb{D}X}$$

$\boxed{\text{Задача } (*/3)}$. Разобраться, когда $\pm$

√ $\boxed{\text{Задача } (*/2)}$ Придумать другую ф-лу H_{min} и проверить её на модельных примерах (как мелкие)

Д-во: по опред. H_{min}, имеем

$$u_I(S_I) = \mathbb{E}\, u_I(S_I - X + H_{min})$$

Левая часть нас устраивает, а с правой частью поступим аналогично предыдущей теореме.

$$U_I(S_I - X + H_{min}) \approx \left\{ \begin{array}{l} f(x) = U_I(x) \\ x = S_I - X + H_{min} \\ x_0 = S_I \quad x_0 = S_I - \mathbb{E}X \\ 3 \text{ чл.} \quad (\text{дома}) \end{array} \right\} \approx$$

$$\approx U_I(S_I) + (H_{min} - X)\, u'(S_I) + \frac{1}{2}(H_{min} - X)^2 u''(S_I)$$

Подставляем это выражение в последнее р-во:

$$U_I(S_I) \approx \mathbb{E}\left(U_I(S_I) + (H_{min} - X)u'(S_I) + \frac{1}{2}(H_{min}-X)^2 u''(S_I)\right) =$$

$$= U_I(S_I) + (H_{min} - \mathbb{E}X)u'(S_I) + \frac{1}{2}\left((H_{min} - \mathbb{E}X)^2 + \mathbb{D}X\right)u''(S_I)$$

$$\to \{ t = H_{min} - \mathbb{E}X \} \Rightarrow \frac{1}{2}U_I''(S_I)t^2 + U_I'(S_I)t + \frac{1}{2}\mathbb{D}X\, U_I''(S_I) = 0$$

$$t_{1,2} = \frac{-u'(S_I) \pm \sqrt{(U_I'(S_I))^2 - \mathbb{D}X(U_I''(S_I))^2}}{U_I''(S_I)}$$

$$\Rightarrow H_{min} \approx \mathbb{E}X - \frac{U_I'(S_I)}{U_I''(S_I)} \pm \sqrt{\left(\frac{U_I'(S_I)}{U_I''(S_I)}\right)^2 - \mathbb{D}X} \quad \blacksquare$$

<u>Примеры:</u>

Проиллюстрируем эти две теор. на примерах.

① $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, $\begin{array}{l} u(x) = -e^{-\beta x} \\ U_I(x) = -e^{-\alpha x} \end{array}$

$$\{\text{по th 10}\} \Rightarrow \begin{array}{l} G_{max} = \mu + \beta\frac{\sigma^2}{2} \\ H_{min} = \mu + \alpha\frac{\sigma^2}{2} \end{array}$$

Это точные ф-лы

По доказан. теор. имеем приближ.

$$G_{max} \approx \mathbb{E}X - \frac{1}{2}\cdot\frac{u''(S - \mathbb{E}X)}{u'(S - \mathbb{E}X)}\mathbb{D}X = \mu - \frac{-\beta^2 e^{-\beta(S-\mu)}\cdot\sigma^2}{2\beta e^{-\beta(S-\mu)}} =$$

$$= \mu + \frac{\sigma^2\beta}{2}$$

$$H_{min} \approx \{ +h\, 12 \} \approx \mathbb{E}X - \frac{u_I'(S_I)}{u_I''(S_I)} \pm \sqrt{\left(\frac{u_I'(S_I)}{u_I''(S_I)}\right)^2 - \mathbb{D}X} =$$

$$= \mu - \frac{\alpha e^{-\alpha S_I}}{-\alpha^2 e^{-\alpha S_I}} \pm \sqrt{\frac{1}{\alpha^2} - \sigma^2} = \mu + \frac{1 \pm \sqrt{1-\alpha^2\sigma^2}}{\alpha} =$$

$$= \left\{ \begin{array}{l} \text{по ф. Тейлора:} \\ \sqrt{1+x} \approx 1 + \frac{x}{2},\ x \approx 0 \end{array} \right\}$$

$$\alpha\sigma \approx 0 \quad \mu + \frac{1 \pm \left(1 - \frac{\alpha^2\sigma^2}{2}\right)}{\alpha} = \left\{ \begin{array}{c} \text{возьмем} \\ \ominus \end{array} \right\} =$$

$$H_{min} = \mu + \frac{\alpha\sigma^2}{2}$$

② $\boxed{\text{Задача } (*/3)}$ ✓

Найти точнее C_{max} и H_{min} и сравнить с приближенными, если

$u(x) = u_I(x) = \log x \quad S = 10 \quad S_I = 100$

X:	1	6
	$1/2$	$1/2$

$\boxed{9.10.18}$

<u>Эмпирическое определение ф-ции полезности.</u>

Будет приведен простейший алгоритм, позволяющий определить ф.п. игрока (клиента) с любой степенью точности. Для реализации необходимо иметь возможность наблюдать за поведением игрока в различных рисковых ситуациях, что это значит, будет показано ниже

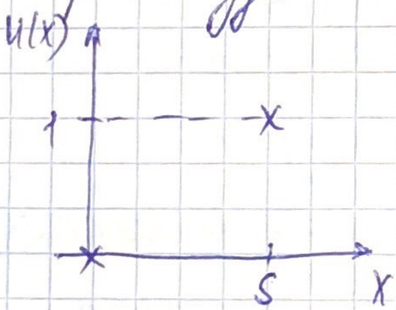
Пусть игрок или клиент имеет неизвестн. ф.п. $u(x)$, которую мы хотим приближенно определить на отрезке $[0, S]$, $S>0$, при этом предположим, что на этом отрезке она строго возрастает. По th1 ф-я вида $au(x)+b$, $a>0$, $b \in \mathbb{R}$ эквивалентна исходной ф.п., поэтому выберем константы a и b так, чтобы эта ф.п. в точках $0, S$ имела фиксирован. значения, например, так, чтобы:

$$\begin{cases} au(0)+b=0 \\ au(S)+b=1 \end{cases} \Rightarrow \quad a=\frac{1}{u(S)-u(0)}>0$$

$$b=\frac{u(0)}{u(0)-u(S)} \in \mathbb{R}^1$$

Это означает, что изначально исходная ф.п. удовлетворяет рав-вам: $u(0)=0$

$u(S)=1$



Предположим, что клиенту на 1ом этапе предлагается купить лотерейный билет вида (сыграть в случайную игру вида): $X_1: \begin{matrix} 0 & S \\ p_1 & 1-p_1 \end{matrix}$, где $p_1 \in [0,1]$

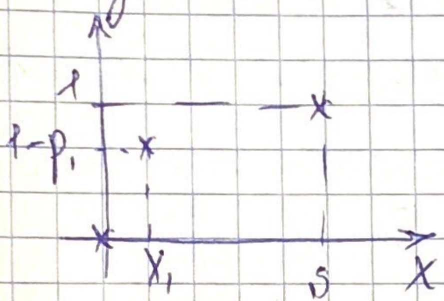
p_1 - известна и в нашей власти

Предположим, что клиент готов купить этот лотерейный билет по цене x_1, т.ч. $x_1 \in [0, S]$ $x_1 \sim X_1$

По опр. ф.п. последнее соотношен. означает, что $u(x_1) = \mathbb{E}u(X_1) = u(0)p_1 + u(S)(1-p_1) =$

$$= \left\{ \begin{matrix} u(0) = 0 \\ u(S) = 1 \end{matrix} \right\} = 1 - p_1$$

При этом п.ч. известна, поэтому известна л.ч., т.е. ф.п. известна в т. x_1



Предположим, что на 2ом шаге клиенту предлагается купить лотерейный билет вида:

$$X_{21}: \begin{matrix} 0 & x_1 \\ p_{21} & 1-p_{21} \end{matrix}, \quad X_{22}: \begin{matrix} x_1 & S \\ p_{22} & 1-p_{22} \end{matrix}, \quad \cancel{X_{23}}$$

$$X_{23}: \begin{matrix} 0 & x_1 & S \\ p_{23} & q_{23} & 1-p_{23}-q_{23} \end{matrix}$$

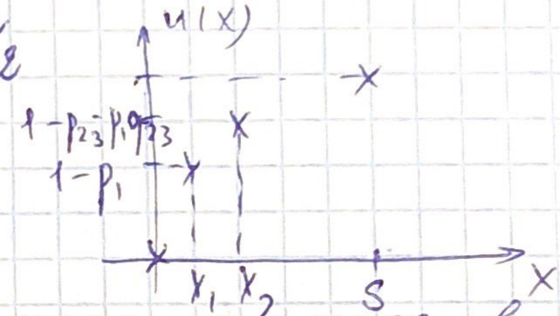
где вероятности у этих с.в. нам известны и в нашей власти.

Предположим, что клиент готов купить 3ий лотер. билет по цене x_2 в том смысле, что $x_2 \sim X_{23}$. По определению ф.п. имеем $u(x_2) = \mathbb{E}u(X_{23}) = u(0)p_{23} + \cancel{u(\mathbb{E}X_1)}$

$+ u(x_1)\cdot q_{23} + u(S)(1-p_{23}-q_{23}) = (1-p_1)q_{23} + 1 - p_{23} - q_{23} =$

$= 1 - p_{23} - p_1 q_{23}$.

П. часть этого выражен. известна, а значит, известна и левая, т.е. неизвестная ф.п. известна в т. x_2



Аналогично р-м с.в X_{22}, X_{21}.

Далее р-м 3ий шаг, аналог. второму, в котором м.б. шестизначная ф.п. и т.д. Проделывая эти шаги, можно получить приближение ф.п. с любой степенью точности.

Заметим, что можно было ограничиться любым из предложенных шагов, но при этом нужно менять вероятности, которые в предложенных шагах предполагались фиксированными

Модель Эрроу (Arrow, 1963)

В этом разделе приведем пример оптимального поведения клиента, которое не зависит от ф.п. В этом разделе оптимальность понимается со стороны клиента страховой фирмы.

Пусть клиент обладает начальным капиталом $S \geq 0$, ф-ей полезн. $u(x)$, которая описывает его отношение к риску, и пусть клиент страдает от случайных потерь $X \geq 0$. За частичное предотвращение потерь клиент готов заплатить величину $G \in (0, S)$.

Страховая компания предлагает частичное возмещение ущерба $I(x)$ или вычет.

$0 \leq I(x) \leq X$ (1) : $\mathbb{E} I(x) = G$ (2)

т.е. потери клиента есть $X - I(x)$ по цене G. Клиент готов согласиться на вычет $I^*(x)$, оптимальный с его точки зрения, такой, что $0 \leq I^*(x) \leq X$ (3)

$\mathbb{E} I^*(x) = G$ (4)

$S - (X - I(x)) - G \leq S - (X - I^*(x)) - G \quad \forall I(x)$

страховая ситуация $\qquad$ удовл. (1) (2)

По опред. ф.п. клиента последн. соотнош.

живаем. нер-ву:

$$\mathbb{E}u(S-X+I(X)-G) \le \mathbb{E}u(S-X+I^*(X)-G) \quad (5)$$

Это так называемая модель Эрроу.

Th13: Пусть $u'(x) \geq 0$, $u''(x) \leq 0$ $\forall x$, т.е. у клиента отвращение к риску. Тогда оптимальное $I^*(x)$, удовл-ее усл. (3)-(5) сущ. и имеет вид

$$I^*(x) = \begin{cases} 0, & x \le d^* \\ x-d^*, & x > d^* \end{cases}$$

при этом число d^* наз-ся <u>оптимальной франшизой</u> и определяется из условия $\mathbb{E}I^*(X) = G$

Заметим, что потери клиента при использовании этого оптимального вычета имеют вид:

$$X - I^*(X) = \begin{cases} X, & X \le d^* \\ d^*, & X > d^* \end{cases}$$

Заметим также, что опт. вычет $I^*(x)$ не зависит от начального капитала S и ф.п. $u(x)$. В этом и состоит основная прелесть этой модели.

??? А если взять $u''(x) \geq 0$? все не работает

В этом дефект модели: условие $u''(x) \le 0$, по-видимому, нельзя заменить на условие $u''(x) \geq 0$ $\forall x$ (см. док-во привед. ниже)

$\boxed{\text{Задача } (*)}$ д-ть теорему.

Д-во:
для док-ва нер-ва (5) дост. д-ть:

$$\mathbb{E}\big(u(S-X+I(X)-G)-u(S-X+I^*(X)-G)\big)\le 0 \quad (6)$$

$\forall I$, удовл. (1) и (2)

докажем сначала вспомогат. нер-во:

$$u''(x)\le 0,\ \forall x \Rightarrow u'(x)\downarrow \Rightarrow u(x)-u(y) = \left\{\begin{matrix}\text{ф-ла}\\ \text{Лагранжа}\end{matrix}\right\} = u'(\xi)(x-y) \le \left\{\begin{matrix} x<y \Rightarrow \\ x\le\xi\le y \Rightarrow \\ u'(\xi)\ge u'(x) \\ x\ge y \Rightarrow \\ x\ge\xi\ge y \Rightarrow \\ u'(\xi)\le u(y)\end{matrix}\right\} \le$$

$$\le u'(y)(x-y),\ \forall x,y$$

Применим это нер-во к л.ч. нер-ва (6) с

$x := S-X+I(X)-G$

$y := S-X+I^*(X)-G$

Получим, что л.ч. нер-ва (6) не превосходит выражения: $\mathbb{E}u'(S-X+I(X)-G)(I(X)-I^*(X))$ и для док-ва нер-ва (6) дост. д-ть, что

$$\mathbb{E}u'(S-X+I(X)-G)(I(X)-I^*(X))\le 0 \quad (7).$$

Докажем теперь нер-во:

$$u'(S-X+I^*(X)-G)(I(X)-I^*(X))\le u'(S-d^*-G)\cdot(I(X)-I^*(X)) \quad (8)$$

Д-м это нер-во. Возможны след. 3 случая (фиксируем X):

1. $I(x) = I^*(x) \Rightarrow (8)$ верно

2. $I^*(x) > I(x) \Rightarrow I^*(x) > 0 \Rightarrow I^*(x) = x - d^* \Rightarrow$
$\Rightarrow I^*(x) - x = -d^* \Rightarrow (8)$ верно

3. $I^*(x) < I(x) \Rightarrow I(x) - I^*(x) > 0$, но $I^*(x) - x \geq$
$\geq -d^* \Rightarrow S - x + I^*(x) - G \geq S - d^* - G \Rightarrow$
$\Rightarrow \{u'(x)\downarrow\} \Rightarrow u'(S - x + I^*(x) - G) \leq$
$\leq u'(S - d^* - G) \Rightarrow (8)$ верно

Итак, нер-во (8) доказано. Применим его к л.ч. нер-ва (7). Имеем:

$\mathbb{E}u'(S-x)+I^*(x)-G)(I(x)-I^*(x)) \leq \{(8)\} \leq$
$\leq \mathbb{E}u'(S-d^*-G)(I(x)-I^*(x)) = u'(S-d^*-G)\cdot$
$\cdot\, \mathbb{E}(I(x)-I^*(x)) = \{(2),(4)\} = u'(S-d^*-G)(G-G)=0$

Сравнивая л.ч. и п.ч., получаем, что нер-во (7) доказано ◻

$\boxed{\text{Задача 1(*)}}$ Что будет, если в условии теоремы $u''(x) \geq 0$, $\forall x$, т.е. у клиента любовь к риску, при этом условии можно изменить модель и д-ть аналогичное утверждение.

При практическом нахождении оптимальной франшизы d^* может быть полезна след. теорема:

th 14: Пусть $\mathbb{E}X < \infty$, и с.в. X имеет плотность $p(x)$. Тогда d^* удовлетв. ур-ию

$$\int_{d^*}^{\infty} (1-F(x))dx = G, \quad F(x) = P(X<x)$$

Д-во: по опред. I^* имеем $G = \mathbb{E}I^*(x) =$

$$= \mathbb{E}(X-d^*)\mathbb{1}_{(d^*,\infty)}(X) = \int (x-d^*)\mathbb{1}_{(d^*,\infty)}(x)\,dF(x) =$$

$$= \{d^* \geq 0\} = \int_{d^*}^{\infty}(x-d^*)dF(x) =$$

$$= \int_{d^*}^{\infty}(x-d^*)d(1-F(x)) = \{\text{по частям}\} =$$

$$= -(x-d^*)(1-F(x))\Big|_{d^*}^{\infty} + \int_{d^*}^{\infty}(1-F(x))dx =$$

$$= -\lim_{x\to\infty}(x-d^*)(1-F(x)) + \underset{0}{\overset{d^*}{\cdot}} + \int_{d^*}^{\infty}(1-F(x))dx =$$

$$= -\lim_{x\to\infty} x(1-F(x)) + 0 + \int_{d^*}^{\infty}(1-F(x))dx$$

докажем, что этот предел равен 0.

$$\mathbb{E}X^{\alpha} < \infty \Rightarrow \int_0^{\infty} x\,dF(x) < \infty \Rightarrow \int_M^{\infty} x\,dF(x) \xrightarrow[M\to\infty]{} 0$$

$$0 \xleftarrow[M\to\infty]{} \int_M^{\infty} x^{\alpha}dF(x) \geq M\int_M^{\infty} dF(x) = M(1-F(M))$$

$$\Rightarrow x^{\alpha}(1-F(x)) \xrightarrow[x\to\infty]{} 0 \qquad \blacksquare$$

Заметим, что доказан. ф-ла для d^* справедлива без предположения существования плотности, поскольку ф-ла интегр. по частям справедлива

в общем случае для интеграла Лебега
Применим посл. теор. к конкретн. случаю

<u>th 15</u>: Пусть страховые требования клиента X имеют экспоненц. распредел. с плотностью вида $p(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$ $\lambda > 0$
Тогда оптим. франшиза имеет вид
$$d^* = \frac{1}{\lambda} \log \frac{1}{\lambda G} \quad (\lambda G \leq 1)$$

<u>Д-во</u>:
$$F(x) = \mathbb{P}(X < x) = \int_{-\infty}^{x} p(t)dt = \begin{cases} \int_0^x \lambda e^{-\lambda t} dt, & x > 0 \\ 0, & x \leq 0 \end{cases} =$$
$$= \begin{cases} -e^{-\lambda t}\Big|_0^x, & x > 0 \\ 0, & x \leq 0 \end{cases} = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x}, & x > 0 \\ 0, & x \leq 0 \end{cases}$$
по послед. теор. имеем
$$G = \int_{d^*}^{\infty} (1 - F(x))dx = \{d^* \geq 0\} = \int_{d^*} e^{-\lambda x} dx =$$
$$= -\frac{1}{\lambda} e^{-\lambda x}\Big|_{d^*}^{\infty} = 0 + \frac{e^{-\lambda d^*}}{\lambda}$$
$$\Rightarrow \lambda G = e^{-\lambda d^*} \Rightarrow d^* = -\frac{1}{\lambda} \log \lambda G = \frac{1}{\lambda} \log \frac{1}{\lambda G} \blacksquare$$

$\boxed{\text{Задача } (*/4)}$ ✓

$X \sim R[0, a]$, $a > 0$, d^* - ?

$\lambda G \leq 1$???

$\lambda G = e^{-\lambda d^*}$

$0 < I^*(x) \leq X \Rightarrow G = \mathbb{E} I^* \leq \mathbb{E} X = \frac{1}{\lambda}$

$\boxed{\text{Задача } (*/3)}$ Найти приближенную ф-лу для $d^* \approx$?

23.10.18

Тh 16: В условиях теор 15 справедлива приближенная ф-ла

$$d^* \approx \mathbb{E}X + \frac{\int_{\mathbb{E}X}^{\infty}(1-F(x))dx - G}{1-F(\mathbb{E}X)}$$

Эту ф-лу можно использовать на практике.

Для этого клиенту необходимо иметь наблюден. $X_1, \dots, X_n$ над его потерями X.

Тогда $\mathbb{E}X \approx \overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$, $\mathbb{F}(x) \approx F_n(x) = \frac{1}{n}\sum \mathbb{1}(X_i \leq x)$

Величина G клиенту известна, поэтому прим величина приемл. порога имеет конечный вид

Д-во: Р-м ф-ию $g(t) = \int_t^{\infty}(1-\mathbb{F}(x))dx$

ф-ла Тейлора $\Rightarrow g(t) \approx g(\mathbb{E}X) + g'(\mathbb{E}X)(t-\mathbb{E}X) =$

$= \{g'(t) = -(1-\mathbb{F}(t)) = \mathbb{F}(t) - 1\} = g(\mathbb{E}X) + (\mathbb{F}(\mathbb{E}X)-1)\cdot$

$\cdot(t-\mathbb{E}X)$

Положим $t = d^* \Rightarrow G = \int_{d^*}^{\infty}(1-\mathbb{F}(x))dx =$

$= g(d^*) \approx \int_{\mathbb{E}X}^{\infty}(1-\mathbb{F}(x))dx + (\mathbb{F}(\mathbb{E}X)-1)(d^*-\mathbb{E}X)$

Следствие: взяв в кач. апроксим. т. 0, получим

$g(t) \approx g(0) + (\mathbb{F}(0)-1)t \quad t := d^*$

$\to d^* \approx \frac{\int_0^{\infty}(1-\mathbb{F}(x)) - G}{1-\mathbb{F}(0)} = \frac{\mathbb{E}X - G}{1-\mathbb{F}(0)}$ в нашем случае

// $\mathbb{E}X = \int_{-\infty}^{+\infty} x\, d\mathbb{F}(x) = \int_0^{\infty}(1-\mathbb{F}(x))dx - \int_{-\infty}^{0}\mathbb{F}(x)dx$ (получили интегр. по частям)

Пример: В т. 15 $X \sim Exp(\lambda)$, $\lambda > 0$

и $d^* = \frac{1}{\lambda}\ln\frac{1}{\lambda G}$. Из т. 16. имеем:

$$d^* \approx \frac{1}{\lambda} + \frac{\int_{1/\lambda}^{\infty} e^{-\lambda x} dx - G}{e^{-1}} = \frac{1}{\lambda} + e\left(-\frac{1}{\lambda} e^{-\lambda x}\Big|_{1/\lambda}^{\infty} - G\right) =$$

$$= \frac{1}{\lambda} + e\left(\frac{e^{-1}}{\lambda} - G\right) = \frac{2}{\lambda} - eG$$

другое прибл-ие: $d^* \approx \frac{\mathbb{E}X - G}{1 - F(0)} = \frac{1/\lambda - G}{1} =$

$= \frac{1}{\lambda}(1 - \lambda G)$

Видим приближение к точному значению d^* при $\lambda G \to 1$.

Рассм. несколько эмпир. способ (принципов) выбора страховых взносов, наиболее часто встречающихся в литературе

Пусть H - величина страхового взноса, который страх. компания требует с клиента.

Обозначим ф.р. возможного ущерба клиента через $F(x) = P(X < x)$

Обычно считают, что $H = H(F, \lambda)$, где λ - параметр, окончательно определяющий выбор страх. взноса.

Рассм. также статист. оценку H_n страх. взноса H, основанную на наблюдениях $X_1, \dots, X_n$ над с.в. X. Обознач. $F_n(x)$ - эмпир. ф.р.

Тогда в силу ЗБЧ $F_n(x) \approx \mathbb{E}\mathbb{1}_{(-\infty,x)}(X_i) =$

$= P(X_1 < x) = F(x)$, $n \to \infty$ $\forall x$

т.е. при больших n $F_n(x)$ близко к $F(x)$, поэтому в кач. оценки $H_n = H(F_n, \lambda)$ при условии регул-сти $H_n = H(F_n, \lambda) \approx H(F, \lambda) = H$

Обознач. оценки $\overline{X} \approx \mathbb{E}X$, $S^2 = \frac{1}{n-1}\sum (X_i - \overline{X})^2 \approx \mathbb{D}X$

1) Принцип оптимального значения (expected value principle)

$H = (1+\lambda)\mathbb{E}X$, $\lambda \geq 0$ - коэффициент нагрузки (safety loading)

для нахождения:

$H_n = H(F_n, \lambda) = (1+\lambda)\int x\, dF_n(x) =$
$= (1+\lambda)\frac{1}{n}\sum X_i = (1+\lambda)\overline{X} \approx H$, $n \to \infty$

2) Принцип вариаций (variance principle)

$H = \mathbb{E}X + \lambda \mathbb{D}X$, $\lambda \geq 0$ - весовой коэфф. для дисперсии

В этом случае учит. разброс потерь относительно среднего. В ф-ле есть дефект, т.к. размерности слагаемых различны. $H_n = \overline{X} + \lambda S^2$ - естественная, но не честная

3) Принцип нулевой полез-ти агента (zero utility principle)

$U_I(x)$ - ф-ция полезности страхователя

$U_I'(x) \geq 0$, $U_I''(x) \leq 0$ $\forall x$ (отвращ. к риску)

S_I - нач. капитал страх. компании

$H = H_{min}$: $S_I + H_{min} - X \sim S_I$

эквивалентность в смысле ф-ции полезности

т.е. $\mathbb{E}U_I(S_I + H_{min} - X) = U_I(S_I)$

Пример: $U_I(x) = \frac{1}{\lambda}(1 - e^{-\lambda x})$ $\lambda > 0$

константы можно выкинуть, будет то же самое

$\mathbb{E}\frac{1}{\lambda}(1 - e^{-\lambda(S_I + H_{min} - X)}) = \frac{1}{\lambda}(1 - e^{-\lambda S_I}) \Rightarrow$

$\Rightarrow \mathbb{E}e^{-\lambda(S_I + H_{min} - X)} = e^{-\lambda S_I} \Rightarrow \mathbb{E}e^{\lambda X} = e^{\lambda H_{min}} \Rightarrow$

$\Rightarrow H = H_{min} = \frac{1}{\lambda} \ln(\mathbb{E} e^{\lambda X})$ - экспоненциальный принцип (exponential principle)

$H_n = \{F_n \to F\} = \frac{1}{\lambda} \ln\left(\frac{1}{n} \sum e^{\lambda X_i}\right)$

5) Принцип Эшера (Escher principle)

$$H = \frac{\mathbb{E} X e^{\lambda X}}{\mathbb{E} e^{\lambda X}}, \quad \lambda \geq 0$$

Th 17: Пусть потери страх. фирмы при $X = x$ имеют вид $L(x, D, \lambda) = (x-D)^2 e^{\lambda x}$

тогда $\min\limits_{D} \mathbb{E} L(X, D, \lambda) = \mathbb{E} L(X, H, \lambda)$

Д-во: $\mathbb{E} L(X, D, \lambda) = \mathbb{E}(X^2 - 2DX + D^2) e^{\lambda X} =$

$= \mathbb{E} X^2 e^{\lambda X} - 2D \mathbb{E} X e^{\lambda X} + D^2 \mathbb{E} e^{\lambda X}$ - кв. 3-н. отн. D

$\Rightarrow D_{min} = \frac{\mathbb{E} X e^{\lambda X}}{\mathbb{E} e^{\lambda X}} = H$ ∎

30.10.18

Th 18: Пусть справедливо $(\mathbb{E} e^{\lambda X})'_\lambda = \mathbb{E}(X e^{\lambda X})$ и $(\mathbb{E} X e^{\lambda X})'_\lambda = \mathbb{E}(X^2 e^{\lambda X})$, т.е. можно дифф-ть под знаком м.о. тогда принцип Эшера $H = \frac{\mathbb{E} X e^{\lambda X}}{\mathbb{E} e^{\lambda X}}$ удовл-ет св-м:

1) $H = (\log \mathbb{E} e^{\lambda X})'_\lambda$

2) при малых λ справедливо

$H = \mathbb{E} X + \lambda \mathbb{D} X + o(\lambda^2), \lambda \to 0$, т.е. при малых λ принцип Эшера примерно совпадает с принципом вариации, описано выше под номером 2.

3) H, рассм-ая как ф-я от λ, возрастает по λ, т.е. $H\uparrow$ по λ, и $H = H(\mathbb{F},\lambda) \geq H(\mathbb{F},0) = \mathbb{E}X$ $\forall \lambda \geq 0$

Д-во:

1) $(\log \mathbb{E} e^{\lambda X})'_\lambda = \dfrac{1}{\mathbb{E}e^{\lambda X}} (\mathbb{E} e^{\lambda X})'_\lambda = \left\{\begin{matrix} \text{в силу} \\ \text{усл. теор} \end{matrix}\right\} =$

$= \dfrac{\mathbb{E}X e^{\lambda X}}{\mathbb{E}e^{\lambda X}} = H$

2) по ф-ле Тейлора справедливо р-во:

$H = H(\mathbb{F},\lambda) = H(0,F) + \lambda H'_\lambda(0,F) + O(\lambda^2)$

при этом $H(0,\mathbb{F}) = \mathbb{E}X$, $H'_\lambda(\lambda,\mathbb{F}) = \left(\dfrac{\mathbb{E}Xe^{\lambda X}}{\mathbb{E}e^{\lambda X}}\right)'_\lambda =$

$= \dfrac{\mathbb{E}X^2 e^{\lambda X}\mathbb{E}e^{\lambda X} - (\mathbb{E}Xe^{\lambda X})^2}{(\mathbb{E}e^{\lambda X})^2} \Rightarrow H'_\lambda(0,\mathbb{F}) = \mathbb{E}X^2 - (\mathbb{E}X)^2 = \mathbb{D}X$

3) для д-ва неубывания H по λ достаточно д-ть $H'_\lambda(\lambda,\mathbb{F}) \geq 0$ $\forall \lambda \geq 0$

Учитывая выражение для этой производн. достат-но д-ть: $\mathbb{E}X^2e^{\lambda X}\mathbb{E}e^{\lambda X} - (\mathbb{E}Xe^{\lambda X})^2 \geq 0$

Для док-ва этого нер-ва используем нер-во Коши-Буняковского в виде $(\mathbb{E}ZY)^2 \leq \mathbb{E}Z^2 \cdot \mathbb{E}Y^2$. Имеем:

$\mathbb{E}X^2e^{\lambda X}\mathbb{E}e^{\lambda X} - (\mathbb{E}Xe^{\lambda X})^2 \geq \left\{\begin{matrix} Z = Xe^{\frac{\lambda X}{2}} \\ Y = e^{\frac{\lambda X}{2}} \end{matrix}\right\} \Rightarrow$

$\geq \mathbb{E}X^2e^{\lambda X}\mathbb{E}e^{\lambda X} - \mathbb{E}X^2e^{\lambda X}\mathbb{E}e^{\lambda X} = 0$ ∎

Задача ($\frac{*}{3}$) Предполагая необходимую дифф-ть под знаком м.о., найти третий член в разложении H

$H = \mathbb{E}X + \lambda \mathbb{D}X + \dfrac{\lambda^2}{2} ? + O(\lambda^3)$

Примеры

1) Пусть $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$. Тогда по доказан. выше $\mathbb{E}e^{\lambda X} = e^{\lambda\mu + \frac{\lambda^2\sigma^2}{2}}$ $\Rightarrow$ {th 18.1} $\Rightarrow$

$\Rightarrow H = (\log \mathbb{E}e^{\lambda X})'_\lambda = (\lambda\mu + \frac{\lambda^2\sigma^2}{2})'_\lambda = \mu + \lambda\sigma^2 \geq \mu \quad \forall \lambda \geq 0$

и из этой ф-лы видно, что $H \uparrow$ по λ.

2) $X \sim B(n, p) \Rightarrow$ // $\Pi(p)$ - ряд будет расход.

$\mathbb{E}e^{\lambda X} = \sum_{k=0}^{n} e^{\lambda k} C_n^k p^k (1-p)^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k (e^\lambda p)^k (1-p)^{n-k} =$

$= (e^\lambda p + 1 - p)^n \Rightarrow H = (\log \mathbb{E}e^{\lambda X})'_\lambda = (n \log(e^\lambda p + 1 - p))'_\lambda =$

$= \frac{ne^\lambda p}{e^\lambda p + 1 - p} \geq \left\{ \begin{matrix} \text{хотим} \\ \mathbb{E}X = np \\ \text{сравнить} \end{matrix} \right\} \geq \frac{npe^\lambda}{e^\lambda p + e^\lambda(1-p)} = np = \mathbb{E}X$

$\mathbb{D}X = np(1-p)$

$H = \{\lambda \to 0\} = \frac{np(1 + \lambda + O(\lambda^2))}{(1 + \lambda + O(\lambda^2))p + 1 - p} = \frac{np(1 + \lambda + O(\lambda^2))}{1 + \lambda p + O(\lambda^2)} =$

$= \left\{ \begin{matrix} \frac{1}{1+\alpha} \underset{\alpha \to 0}{=} 1 - \alpha + O(\alpha^2) \\ \alpha = \lambda p + O(\lambda^2) \end{matrix} \right\} = np(1 + \lambda + O(\lambda^2))(1 - \lambda p + O(\lambda^2)) =$

$= np + \lambda(np - np^2) + O(\lambda^2) = \mathbb{E}X + \lambda\mathbb{D}X + O(\lambda^2)$

Проверим теперь статистич. оценку H, основанную на наблюдениях $X_1, \ldots, X_n$ над с.в. X.

$H = \frac{\mathbb{E}Xe^{\lambda X}}{\mathbb{E}e^{\lambda X}} = \frac{\int xe^{\lambda x} dF(x)}{\int e^{\lambda x} dF(x)} \Rightarrow H_n = H(F_n, \lambda) =$

$= \frac{\int xe^{\lambda x} dF_n(x)}{\int e^{\lambda x} dF_n(x)} = \frac{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i e^{\lambda X_i}}{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} e^{\lambda X_i}} = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i e^{\lambda X_i}}{\sum_{i=1}^{n} e^{\lambda X_i}}$

6] Свисс - принцип (Swiss principle)

$\exists f(x): f'(x) > 0, f''(x) \geq 0 \quad \forall x$

Тогда согласно этому принципу H выбирается из решения уравнения H:
$\mathbb{E}f(X-\lambda H)=f((1-\lambda)H)$, $\lambda\in[0,1]$

Заметим, что при $\lambda=0$, поскольку $\exists f^{-1}$,
$H=f^{-1}(\mathbb{E}f(X))$ - обобщенный принцип среднего значения (generalized mean value principle)

Th 19: 1) При $\lambda=1$, H выбирается согласно принципу нулевой полезности с ф.п. вида
$u_I(x)=-f(-x+S)$

2) Если $f(x)=a^{-1}(e^{ax}-1)$, $a>0$, то H выбирает согласно экспоненциальному принципу, описанному выше.

3) $\lambda=1$, $f(x)=xe^{ax}$, $a>0$ $\Rightarrow$ H выбирается согласно принципу Эшера.

Д-во: 1) принцип нулевой полез-ти означает, что H: $\mathbb{E}u_I(S_I+H-X)=u_I(S_I)$
Подставим в это выражение
$u_I(x)=-f(-x+S_I)$. Получим:
$-\mathbb{E}f(-S_I-H+X+S_I)=-f(-S_I+S_I)\Rightarrow$
$\Rightarrow\mathbb{E}f(X-H)=f(0)$, т.е. этот принцип в $\lambda=1$.

2) Подставляя выражение для $f(x)$ в определение H, имеем:
$\frac{1}{a}\mathbb{E}(e^{a(X-\lambda H)}-1)=\frac{1}{a}(e^{a(1-\lambda)H}-1)\Rightarrow$

$\Rightarrow e^{-a\lambda H}\, \mathbb{E} e^{aX} = e^{aH - a\lambda H} \Rightarrow H = \frac{1}{a} \log \mathbb{E} e^{aX}$ — экспоненциальный принцип

3) $\lambda = 1 \Rightarrow \mathbb{E} f(X-H) = f(0) \Rightarrow \{ f(x) = xe^{ax}, a>0 \}$

$\mathbb{E}(X-H)e^{a(X-H)} = 0 \Rightarrow \mathbb{E} Xe^{aX} - H\mathbb{E} e^{aX} = 0$

$\Rightarrow H = \frac{\mathbb{E} Xe^{aX}}{\mathbb{E} e^{aX}}$ — Эшер с $\lambda = a$ ∎

Задача ($\frac{*}{2}$) принцип Орлича (Orlicz principle)

$\rho(x)$ — строго возраст. ф-я. Тогда согласно принципу Орлича H выбирается как решение ур-я

$$H:\ \mathbb{E}\rho(XH^{-\lambda}) = \rho(H^{1-\lambda}) \quad \lambda \in [0,1]$$

Придумать модель, показывающую, что этот принцип разумен, т.е. д-ть теорему, аналогичную последней

// $\lambda = 0$ $\mathbb{E}\rho(X) = \rho(H)$

$\rho(x) = x \Rightarrow H = \mathbb{E}X$

$\lambda = 1$ $\mathbb{E}\rho(XH^{-1}) = \rho(1)$

$\rho(x) = x \Rightarrow H = \mathbb{E}X$

Какую взять ρ, чтобы получился принцип Эшера, например.

16.11

Некоторые модели индивидуальных исков.

Пусть страх. компания занимается страхованием случ. потерь клиента, которые описываются с.в. X. В этом разделе р-м некоторые модели, определ. структуру X. Предположим сначала, что страх. компания занимается страхов. жизни. Пусть вероятность смерти клиента $= p \in (0,1)$ и в случае смерти страх. комп. выплачивает сумму $b > 0$. В этом случае с.в. X имеет вид:

$$X : \begin{matrix} 0 & b \\ 1-p & p \end{matrix}$$

и если ввести индикатор $\mathbb{1} = \begin{cases} 1, & \text{произ. с.с} \\ 0, & \text{не произ.} \end{cases}$

Тогда с.в. X можно записать в виде

$X = \mathbb{1} \cdot b$ $P(\mathbb{I}=1)=p$ это так называемая факторизационная модель, поскольку здесь произведение, обобщая которую часто считают, что с.в. X имеет вид $\mathbb{I} \cdot B$, где B – случ. велич. страх. выплат, причем с.в. $\mathbb{I}$ и B в общем случае зависимы, поскольку в общем случае, страховой случай может происходить по разным причинам. И от этих причин зависят страх. выплаты.

<u>Например</u>, р-м страхование жизни в течение года с учетом несчастных случаев. Пусть вер-ть смерти при несчастном случае равна 0,0005 и при этом выплата родствен. составляет 50000$. В любом другом случ. вер-ть смерти = 0,002 и выплата 25000$. Тогда можно считать, что эти значения задают совместное распредел. вида

$\mathbb{P}(I=1, B=50000)=0{,}0005$

$\mathbb{P}(I=1, B=25000)=0{,}002$

Тогда отсюда следует

$\mathbb{P}(I=1)=\mathbb{P}(I=1, B=50000)+\mathbb{P}(I=1, B=25000)=$
$=0{,}0005+0{,}002=0{,}0025$

$\mathbb{P}(I=0)=1-\mathbb{P}(I=1)=0{,}9975$

$\mathbb{P}(B=25000 \mid I=1)=\dfrac{\mathbb{P}(B=25000, I=1)}{\mathbb{P}(I=1)}=\dfrac{0{,}002}{0{,}0025}=0{,}8$

произошел страх случай и мы выплатили 25000

$\mathbb{P}(B=50000 \mid I=1)=\dfrac{0{,}0005}{0{,}0025}=0{,}2$

$\Rightarrow \mathbb{P}(B=25000 \mid I=1)+\mathbb{P}(B=50000 \mid I=1)=1.$

можно также предложить другую модель, а именно, считать, что

$\mathbb{P}(\mathbb{I}=1 \mid B=50000)=0{,}0005$

$\mathbb{P}(\mathbb{I}=1 \mid B=25000)=0{,}002$

$\mathbb{P}_1(B=50000 \mid \mathbb{I}=1)=0{,}0005$ | так неверно !!!

$\mathbb{P}_2(B=25000 \mid \mathbb{I}=1)=0{,}002$ | сумма не 1.

дополним $\mathbb{P}(B=0 \mid \mathbb{I}=1)=1-\mathbb{P}_1-\mathbb{P}_2$

Можно однако задавать условное распред. B. Например при авто страховании соб. $\mathbb{I}=1$ означает, что произошла авария. Тогда естественно задавать условную ф-ю ущерба вида $\mathbb{P}(B<x \mid \mathbb{I}=1)$. Притом возникает вопрос м.о. X, диспер. X.

Th 20: Пусть $X=B\cdot\mathbb{I}$, причем $\mathbb{I}: \begin{matrix} 0 & 1 \\ 1-p & p \end{matrix}$

Тогда $\mathbb{E}X=\mu\cdot p$ и $\mathbb{D}X=\mu^2 p(1-p)+\sigma^2 p$, где

$\mu=\mathbb{E}(B \mid \mathbb{I}=1)$, $\sigma^2=\mathbb{D}(B \mid \mathbb{I}=1)$

$F_X(x)=\mathbb{P}(X<x)=p\mathbb{P}(B<x \mid \mathbb{I}=1)+(1-p)\mathbb{1}_{(-\infty,x)}(0)$

х.ф. $f_X(t)=\mathbb{E}e^{itX}=p\mathbb{E}(e^{itB} \mid \mathbb{I}=1)+1-p$

Д-во:

$\mathbb{E}X=\mathbb{E}\mathbb{E}(X \mid \mathbb{I})=\mathbb{E}(X \mid \mathbb{I}=0)(1-p)+\mathbb{E}(X \mid \mathbb{I}=1)p=$

$=\mathbb{E}(B\mathbb{I} \mid \mathbb{I}=0)(1-p)+\mathbb{E}(B\mathbb{I} \mid \mathbb{I}=1)\cdot p=0+$

$+\mathbb{E}(B \mid \mathbb{I}=1)\cdot p=\mu\cdot p.$

$\mathbb{E}X^2 = p\,\mathbb{E}(B^2 \mid \mathbb{I}=1)$

$\mathbb{D}X = \mathbb{E}X^2 - (\mathbb{E}X)^2 = p\,\mathbb{E}(B^2 \mid \mathbb{I}=1) - \mu^2 p^2 =$

$\cancel{= p^2\sigma^2 - p^2\,\mathbb{E}(B^2 \mid \mathbb{I}=1) + p\,\mathbb{E}(B^2 \mid \mathbb{I}=1)}$

$= p\sigma^2 + p(\mathbb{E}(B^2 \mid \mathbb{I}=1))^2 - \mu^2 p^2 = p\sigma^2 + \mu^2 p(1-p)$

$F_X(x) = \mathbb{P}(X < x) = \mathbb{P}(B\mathbb{I} < x) = p\,\mathbb{P}(B\mathbb{I} < x \mid \mathbb{I}=1) +$

$+ (1-p)\,\mathbb{P}(B\mathbb{I} < x \mid \mathbb{I}=0) = p\,\mathbb{P}(B < x \mid \mathbb{I}=1) +$

$+ (1-p)\,\mathbb{P}(0 < x \mid \mathbb{I}=0) = p\,\mathbb{P}(B < x \mid \mathbb{I}=1) +$

$+ (1-p)\,\mathbb{E}\left(\mathbb{1}_{(-\infty, x)}(0) \mid \mathbb{I}=0\right) =$

$= p\,\mathbb{P}(B < x \mid \mathbb{I}=1) + (1-p)\,\mathbb{1}_{(-\infty, x)}(0)$

<u>Задача (*)</u> (кто первый)

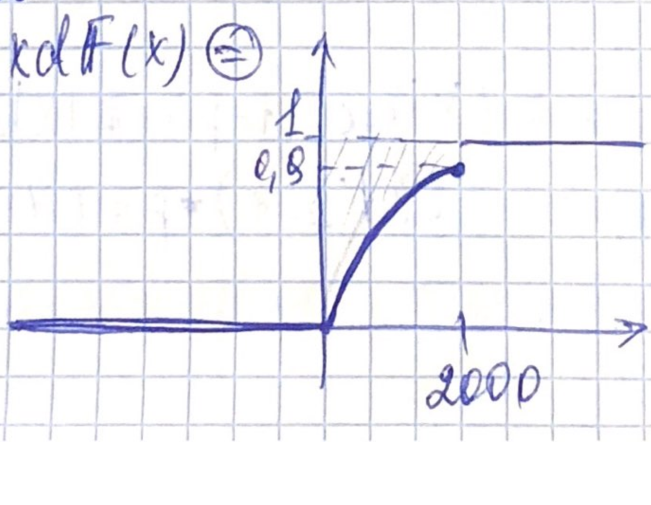
Пусть в авто страхов. величина ущерба распределена $\mathbb{P}(B < x \mid \mathbb{I}=1) = \begin{cases} 0, & x \le 0 \\ 0{,}9\left(1 - \left(1 - \frac{x}{2000}\right)^2\right) \\ 1, & x > 2000 \end{cases}$

пусть вер-ть аварии $\mathbb{P}(\mathbb{I}=1) = p = 0{,}15$,

$\mathbb{P}(\mathbb{I}=0) = 0{,}85$

Найти: $\mathbb{E}X$; $\mathbb{D}X$

$p \cdot \int_0^{2000} x\, dF(x) \ominus$



13.11.18

Предположим, что страх. компании за предоставл. случ. потерь $X \geq 0$ согласно принципу сред. сред. знач. $(1+\lambda)\mathbb{E}X$, $\lambda \geq 0$ требует с клиента выплаты

Возник вопрос, как выбрать λ. Одна из возможностей страх. комп. выбрать λ так, чтобы с большой вер. случ. потери комп. не превосход. $(1+\lambda)\mathbb{E}X$, т.е. так чтобы $\mathbb{P}(X \leq (1+\lambda)\mathbb{E}X) \geq 1-\alpha$, где $\alpha \in (0,1)$ мало

Найдем оценки для λ.

Th21: 1) Указан. выше нер-во выполн. если $\lambda \geq \frac{1-\alpha}{\alpha}$ или $\lambda \geq \frac{1}{\mathbb{E}X}\sqrt{\frac{\mathbb{D}X}{\alpha}}$

на практике обычно в качестве $\lambda = \min\left(\frac{1-\alpha}{\alpha}, \frac{1}{\mathbb{E}X}\sqrt{\frac{\mathbb{D}X}{\alpha}}\right)$ и границу во втором нер-ве можно оценить статист. заменяя $\mathbb{E}X$ на $\overline{X}$, $\mathbb{D}X$ на S^2

2) в случае $X = B \cdot I$ н-во приобретает вид

$$\lambda \geq \frac{1}{\mu}\sqrt{\frac{\mu^2(1-p)+\sigma^2}{\alpha p}}$$

Д-во: 2 утв. следует из 1 и пред. теор. докажем 1.

нер-во Чебышева $\forall Y \geq 0, \forall a > 0$

$$\mathbb{P}(Y \geq a) \leq \frac{\mathbb{E}Y}{a}$$

$$P(X \leq (1+\lambda)\mathbb{E}X) \geq 1-\alpha \Leftrightarrow 1-P(X > (1+\lambda)\mathbb{E}X) \geq 1-\alpha$$

$$\mathbb{P}(X > (1+\lambda)\mathbb{E}X) \leq \alpha$$

$$\mathbb{P}(X > (1+\lambda)\mathbb{E}X) \leq \frac{\mathbb{E}X}{(1+\lambda)\mathbb{E}X} = \frac{1}{1+\lambda} \leq \alpha \Rightarrow \lambda \geq \frac{1-\alpha}{\alpha}$$

для получения второго н-ва

$$\mathbb{P}(X > (1+\lambda)\mathbb{E}X) = \mathbb{P}(X - \mathbb{E}X > \lambda \mathbb{E}X) \le$$

$$\le \mathbb{P}(|X - \mathbb{E}X| > \lambda \mathbb{E}X) =$$

$$= \mathbb{P}((X-\mathbb{E}X)^2 > \lambda^2 (\mathbb{E}X)^2) \le \left\{ \begin{matrix} \text{нер-во} \\ \text{Чебышева} \end{matrix} \right\} \le$$

$$\le \frac{\mathbb{D}X}{\lambda^2 (\mathbb{E}X)^2} \le \alpha \Rightarrow \lambda \ge \frac{1}{\mathbb{E}X}\sqrt{\frac{\mathbb{D}X}{\alpha}}$$

$$= \mathbb{P}\left(e^{X-\mathbb{E}X} > e^{\lambda \mathbb{E}X}\right) \le \frac{\mathbb{E}e^{X-\mathbb{E}X}}{e^{\lambda \mathbb{E}X}} \le \alpha$$

$$\ln \frac{e^{\mathbb{E}X}\mathbb{E}e^{X}}{\alpha} \le \lambda \mathbb{E}X$$

Пример: $X \sim R[0,3]$ $\quad \mathbb{E}X = \frac{3}{2}$, $\mathbb{D}X = \frac{3}{4}$

$$\mathbb{P}(X > (1+\lambda)\mathbb{E}X) = 1 - \mathbb{P}(X \le (1+\lambda)\mathbb{E}X) = \left\{ \begin{matrix} \lambda\text{ - мало} \\ (1+\lambda)\cdot\frac{3}{2} < 3 \\ \Rightarrow \lambda < 1 \end{matrix} \right\}$$

$$= 1 - \frac{1+\lambda}{2} \qquad \lambda = 1 - 2\alpha$$

Сравним с велич. $\frac{1-\alpha}{\alpha}$, $\frac{1}{3}\sqrt{\frac{3}{\alpha}} = \frac{1}{\sqrt{3\alpha}}$

Р-м случай $X = X_1 + \ldots + X_n$ страх. треб. од. независим. клиентов

$X_1, \ldots, X_n$ - нор с $\mu = \mathbb{E}X_1$, $\sigma^2 = \mathbb{D}X < \infty$

$n \to \infty$ тогда согласно ЦПТ:

$$\sup_{-\infty \le a < b \le +\infty} \left| \mathbb{P}\left(a \le \frac{X - n\mu}{\sqrt{n}\,\sigma} \le b\right) - \Phi(b) + \Phi(a) \right| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-t^2/2}\, dt$$

Th 2.2.0 $\sigma^2 < +\infty$ $\lambda \approx \frac{\sigma u_{1-\alpha}}{\sqrt{n}\mu}$.

$u_{1-\alpha}$ - квантиль $\Phi(u_{1-\alpha}) = 1-\alpha$

Д-во:

$1-\alpha = P(X \le (1+\lambda)EX) = P(X_1 + \ldots + X_n \le (1+\lambda)n\mu) =$

$= P(\sum X - n\mu \le \lambda n\mu) = P\left(\frac{\sum X - n\mu}{\sqrt{n}\sigma} \le \frac{\lambda n \mu}{\sqrt{n}\sigma}\right) \approx$

$\approx \Phi\left(\frac{\lambda\sqrt{n}\mu}{\sigma}\right)$

$\frac{\lambda\sqrt{n}\mu}{\sigma} \approx u_{1-\alpha}$

Задача (*) 5000 0,006 в случ. смерти

150000 вносит 10^6 выплата

Какова вер-ть: 1) что комп. в убытке?

2) доход $\ge 300 \cdot 10^6$

20.11.18

Модели краткосрочных коллективных исков.

Пусть число страх. требований за данный период есть с.в. N вида

$N: 0, 1, 2, \ldots$

$p_0, p_1, p_2, \ldots$ $p_i = P\{N = i\}$ $i = 0, 1, \ldots$

и X_i - страх. выплаты i-ому клиенту.

Тогда $X = \begin{cases} X_1 + \ldots + X_N, & N \ge 1 \\ 0, & N = 0 \end{cases} = (X_1 + \ldots + X_N)\mathbb{1}_{[1,\infty)}(N)$

общая величина страховых выплат за данный период.

Отсюда с.в. X называют случ. суммой, поскольку число слагаемых у нее случайно.

Заметим, что если за данный период пришло n клиентов, где n не случайно, а $n = 0, 1, \ldots$, то этот случай явл. частным случаем предыдущего с N, вида

в этом случае $X = X_1 + \ldots + X_n$

Всюду ниже будем предполагать, что

1. $X_1, X_2, \ldots$ — н.о.р.с.в.
2. N, X_1, X_2 — независимы

Прежде всего возникают вопросы $\mathbb{E}X$ и $\mathbb{D}X$ случ. суммы

Th 23: при сделанных предполож. справедливы р-ва $\mathbb{E}X = \mathbb{E}N \cdot \mathbb{E}X_1$, $\mathbb{D}X = \mathbb{E}N \cdot \mathbb{D}X_1 + (\mathbb{E}X_1)^2 \mathbb{D}N$

проверка грубая: $N : \frac{n}{1}$ $\quad \mathbb{E}X = n\mathbb{E}X_1$, $\mathbb{D}X = n\mathbb{D}X_1 + 0$.

Д-во:

$$\mathbb{E}X = \mathbb{E}\left((X_1 + \ldots + X_N)\mathbb{1}_{[1,\infty)}(N)\right) = \mathbb{E}\mathbb{E}\left((X_1 + \ldots + X_N)\mathbb{1}_{[1,\infty)}(N) \mid N\right) =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{E}\left((X_1 + \ldots + X_N)\mathbb{1}_{[1,\infty)}(N) \mid N = k\right) \mathbb{P}(N = k) =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{E}\left((X_1 + \ldots + X_k)\mathbb{1}_{[1,\infty)}(k) \mid N = k\right) \mathbb{P}(N = k) =$$

$$= \left\{ \begin{array}{l} N \text{ и } X_1, X_2, \ldots \\ \text{независимы} \end{array} \right\} = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{E}(X_1 + \ldots + X_k)\mathbb{1}_{[1,\infty)}(k)\, \mathbb{P}(N = k) =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{E}(X_1 + \ldots + X_k)\, \mathbb{P}(N = k) = \{X_i \text{ — норсв}\} =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} k \mathbb{E}X_1 \mathbb{P}(N=k) = \mathbb{E}X_1 \sum_{k=0}^{\infty} k\, \mathbb{P}(N=k) = \mathbb{E}X_1 \mathbb{E}N$$

аналогично этому имеем

$$\mathbb{E}X^2 = \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{E}(X_1 + \ldots + X_k)^2 \mathbb{P}(N=k) = \sum_{k=1}^{\infty} (\mathbb{D}(X_1 + \ldots + X_k) +$$

$$+ (\mathbb{E}(X_1 + \ldots + X_k))^2) \mathbb{P}(N=k) = \{X_i \text{ - н.од.с.в}\} =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} (k \mathbb{D}X_1 + (k\mathbb{E}X_1)^2) \mathbb{P}(N=k) = \mathbb{D}X_1 \sum_{k=0}^{\infty} k \mathbb{P}(N=k) +$$

$$+ (\mathbb{E}X_1)^2 \sum_{k=0}^{\infty} k^2 \mathbb{P}(N=k) = \mathbb{D}X_1 \mathbb{E}N + (\mathbb{E}X_1)^2 \mathbb{E}N^2$$

отсюда $\mathbb{D}X = \mathbb{E}X^2 - (\mathbb{E}X)^2 = \mathbb{D}X_1 \mathbb{E}N + (\mathbb{E}X_1)^2 \mathbb{E}N^2 -$

$$- (\mathbb{E}X_1)^2 (\mathbb{E}N)^2 = \mathbb{E}N \mathbb{D}X_1 + (\mathbb{E}X_1)^2 \mathbb{D}N \blacksquare$$

Задача (*/2)

Получить ф-лы для $\mathbb{E}X$ и $\mathbb{D}X$ без использования условных мат. ожиданий

$$\mathbb{E}(X_1 + \ldots + X_N) \mathbb{1}_{[1,\infty)}(N) =$$

Возникает вопрос о виде ф-ии распредел. и хар. ф-ии случайной суммы

Th 24. При сделанных предположениях справедл. ф-лы: $F(x) = \mathbb{P}(X < x) = \mathbb{1}_{(0,\infty)}(x) \mathbb{P}(N=0) +$

$$+ \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}(X_1 + \ldots + X_k < x) \mathbb{P}(N=k)$$

если X_i, $i = 1, 2, \ldots$ - дискретны, то

$$\mathbb{P}(X = x) = \mathbb{1}_{\{0\}}(x) \mathbb{P}(N=0) + \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}(X_1 + \ldots + X_k = x) \mathbb{P}(N=k)$$

для хар. ф-ии случайной суммы справедлива ф-ла: $f_X(t) = \mathbb{E}e^{itX} = g_N(f_{X_1}(t))$, где $g_N(s) \equiv \mathbb{E}s^N$

$|s| \le 1$, $t \in \mathbb{R}^1$ - производ. ф-я N

$f_{X_1}(t) = \mathbb{E} e^{itX_1}$

Д-во: $P(X<x) = \mathbb{E}\,\mathbb{1}_{(-\infty,x)}(X) = \mathbb{E}\,\mathbb{1}_{(-\infty,x)}\big((X_1+\ldots+X_N)\mathbb{1}_{[1,\infty)}(N)\big) =$

$= \mathbb{E}\,\mathbb{E}\big(\mathbb{1}_{(-\infty,x)}((X_1+\ldots+X_N)\mathbb{1}_{[1,\infty)}(N))\,|\,N\big) = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{E}\big(\mathbb{1}_{(-\infty,x)}((X_1+\ldots+X_N)\mathbb{1}_{[1,\infty)}(N))\,|\,N=k\big) \cdot$

$\cdot P(N=k) = \{\text{нез-ть}\} = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{E}\,\mathbb{1}_{(-\infty,x)}\big((X_1+\ldots+X_k)\mathbb{1}_{[1,\infty)}(k)\big) P(N=k) =$

$= \mathbb{1}_{(-\infty,x)}(0)\, P(N=0) + \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{E}\,\mathbb{1}_{(-\infty,x)}(X_1+\ldots+X_k)\, P(N=k) =$

$= \mathbb{1}_{(0,\infty)}(x)\, P(N=0) + \sum_{k=1}^{\infty} P(X_1+\ldots+X_k < x)\, P(N=k)$

нужен пусть $x \to +\infty$ тогда без этого слагаемого не получится

Для дискретного случая д-ть самим.

$f_X(t) = \mathbb{E} e^{itX} = \mathbb{E} e^{it(X_1+\ldots+X_N)\mathbb{1}_{[1,\infty)}(N)} =$ усл. м.о. и всякое такое

$= \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{E} e^{it(X_1+\ldots+X_k)\mathbb{1}_{[1,\infty)}(k)} \cdot P(N=k) = P(N=0) + \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{E} e^{it(X_1+\ldots+X_k)} P(N=k)$

$= \left\{ \begin{array}{l} f_{X_1}(t) = \mathbb{E} e^{itX_1} \\ \text{нез-ть } e^{itX_1}, \ldots, e^{itX_k} \end{array} \right\} = P(N=0) + \sum_{k=1}^{\infty} f_{X_1}^k(t)\, P(N=k) =$

$= \left\{ \begin{array}{l} \varphi_N(s) = \mathbb{E} s^N = \\ = P(N=0) + \sum_{k=1}^{\infty} s^k P(N=k) \\ s := f_{X_1}(t) \end{array} \right\} = \varphi_N(f_{X_1}(t))$ ■

Р-м теперь несколько примеров применения этой теоремы

Th 25: Пусть с.в. N имеет распредел. Пуассона с пар-ом λ, т.е. $N \sim \Pi(\lambda) \Leftrightarrow P(N=k) = e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^k}{k!}$, $k=0,1,\ldots$

тогда $\mathbb{E}X = \lambda \mathbb{E}X_1$, $\mathbb{D}X = \lambda \mathbb{E}X_1^2$, $f_X(t) = \exp\{\lambda(f_{X_1}(t)-1)\}$

т.е. с.в. N описывает редкие события, что характерно для страхования

$b(k,n,p) = C_n^k p^k q^{n-k} \longrightarrow \left\{ \begin{matrix} np \xrightarrow{p \approx \frac{\lambda}{n} \to 0} \lambda \\ n \to \infty \end{matrix} \right\} \to e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}$ число успехов

Д-во: Найдем производ. ф-ю, имеем

$$g_N(s) = \mathbb{E}s^N = \sum_{k=0}^{\infty} s^k e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!} = e^{-\lambda}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(\lambda s)^k}{k!} =$$

$$= e^{-\lambda}\cdot e^{\lambda s} = e^{\lambda(s-1)} \Rightarrow \{Th\ 24\}$$

$$\Rightarrow f_X(t) = g_N(f_{X_1}(t)) = e^{\lambda(f_{X_1}(t)-1)}$$

$$\mathbb{E}N = g_N'(1) = \left(e^{\lambda(s-1)}\right)'_s\Big|_{s=1} = \lambda e^{\lambda\cdot 0} = \lambda$$

$$\Rightarrow \{th\ 29\} \Rightarrow \mathbb{E}X = \mathbb{E}N\mathbb{E}X_1 = \lambda\mathbb{E}X_1$$

$$g_N''(1) = \mathbb{E}N(N-1) = \left(e^{\lambda(s-1)}\right)''\Big|_{s=1} = \lambda^2$$

факториальный момент

$$\Rightarrow \mathbb{D}N = \mathbb{E}N(N-1) + \mathbb{E}N - (\mathbb{E}N)^2 = \lambda^2 + \lambda - \lambda^2 = \lambda$$

$$\{th\ 29\} \Rightarrow \mathbb{D}X = \mathbb{E}N\cdot\mathbb{D}X_1 + (\mathbb{E}X_1)^2\mathbb{D}N =$$

$$= \lambda\mathbb{D}X_1 + \lambda(\mathbb{E}X_1)^2 = \lambda(\mathbb{D}X_1 + (\mathbb{E}X_1)^2) = \lambda\mathbb{E}X_1^2 \blacksquare$$

$$f_X(t) = \mathbb{E}e^{itX} \Rightarrow \mathbb{E}X = \frac{f_X'(0)}{i}$$

$$\mathbb{E}X^2 = \frac{f_X''(0)}{i^2}$$

не таким способом получать

$$f_X(t) = g_N(f_{X_1}(t)), \quad \mathbb{E}X = \frac{f_X'(0)}{i} = \frac{g_N'(f_{X_1}(0))\, f_{X_1}'(0)}{i} =$$

$$= \frac{g_N'(1)\, f_{X_1}'(0)}{i} = \mathbb{E}N\cdot\mathbb{E}X_1$$

$$1 + mx - \frac{m(m-1)}{2!}$$

$X = \begin{cases} X_1 + \ldots + X_N, & N \geq 1 \\ 0, & N = 0 \end{cases}$ — с.в. 27.11.18

$X_1, X_2, \ldots$ норсв } незав.
N - с.в.

$\mathbb{E}X = \mathbb{E}N \mathbb{E}X_1$, $\mathbb{D}X = \mathbb{E}N \cdot \mathbb{D}X_1 + (\mathbb{E}X_1)^2 \mathbb{D}N$

$f_X(t) = \mathbb{E}e^{itX} = g_N(f_{X_1}(t))$, $g_N(s) = \mathbb{E}s^N$

Th26: Пусть ~~#~~ с.в. N имеет геометр. распредел. с парам-ом $p \in (0,1) \Longleftrightarrow \mathbb{P}(N=k) = pq^k$, $k = 0, 1, \ldots$, $q = 1-p$, т.е. с.в. N это число испытаний Бернулли с вер-ю успеха p в одном испыт. до появления первого успеха тогда

$\mathbb{E}X = \frac{q}{p}\mathbb{E}X_1$; $\mathbb{D}X = \frac{q}{p}\mathbb{D}X_1 + \frac{q}{p^2}(\mathbb{E}X_1)^2$;

$f_X(t) = \frac{p}{1 - f_{X_1}(t)q}$

Д-во:
по th23 имеем $f_X(t) = g_N(f_{X_1}(t))$

$g_N(s) = \mathbb{E}s^N = \sum_{k=0}^{\infty} s^k pq^k = p\sum_{k=0}^{\infty}(sq)^k = p \cdot \frac{1}{1-sq}$

$\Rightarrow f_X(t) = \frac{p}{1 - f_{X_1}(t)q}$

$\mathbb{E}N = g_N'(1) = \frac{p}{(1-sq)^2} \cdot q \Big|_{s=1} = \frac{p}{p^2} \cdot q = \frac{q}{p}$

$\Rightarrow \mathbb{E}X = \{th23\} = \mathbb{E}X_1 \mathbb{E}N = \frac{q}{p}\mathbb{E}X_1$

$\mathbb{E}N(N-1) = g_N''(1) = \frac{2pq^2}{(1-sq)^3}\Big|_{s=1} = \frac{2q^2}{p^2}$

$\Rightarrow \mathbb{D}N = \mathbb{E}N(N-1) + \mathbb{E}N - (\mathbb{E}N)^2 =$

$= \frac{2q^2}{p^2} + \frac{q}{p} - \frac{q^2}{p^2} = \frac{q^2}{p^2} + \frac{q}{p} = \frac{q}{p^2}$

$\Rightarrow DX = \{\text{Th } 23\} = EN \cdot DX_1 + DN (EX_1)^2 =$

$= \frac{q}{p} DX_1 + \frac{q}{p^2} (EX_1)^2$ ■

Задача (*)

Пусть N имеет отрицательно биноминальное распредел. с $p \in (0,1)$, $m \geq 1$, т.е.

N - число испыт. Бернулли с вер-ю успеха p в одном испыт. до появлен. m успехов ($m = 1$, геом. закон из пред. теоремы)

$$\mathbb{P}(N = k) = C^k_{m+k-1} p^m \cdot q^k, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

$$\overset{?}{\Rightarrow} EX, DX, f_X(t) - ?$$

$$g_N(s) = \mathbb{E} S^N = \sum_{k=0}^{\infty} s^k C^k_{m+k-1} p^m \cdot q^k \;(=)$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} s^k \frac{p^m \cdot q^k \cdot (m+k-1)!}{k! \, (m-1)!} = \sum_{k=0}^{\infty} \dots$$

$(m+k-1)! = \Gamma(m+k)$

$$= \frac{p^m}{(m-1)!} \sum_{k=0}^{\infty} s^k \cdot \frac{q^k \cdot (m+k-1)!}{k!} =$$

$$= \frac{p^m}{\Gamma(m)} \sum_{k=0}^{\infty} s^k \frac{q^k}{k!} \Gamma(m+k) =$$

$$= \frac{p^m e^s}{\Gamma(m)} \sum_{k=0}^{\infty} \Gamma(m+k) \cdot q^k = \frac{p^m e^s}{(m-1)!} \sum_{k=0}^{\infty} (m+k-1)! \cdot q^k =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} p^m \cdot s^k \cdot q^k \cdot (m-1)! \, \{m(m+1) \dots (m+k-1)\}$$

$$(=) \; p^m \sum (m+k-1)(m+k-2) \dots m \, (sq)^k =$$

$$= \left\{ \begin{array}{l} (1+x)^{\alpha} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha-1) \dots (\alpha-k+1)}{k!} x^k \\ \forall \alpha \quad |x| < 1 \end{array} \right\} =$$

$$= p^m \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-m)(-m-1)\dots(-m-k+1)}{k!} (-1)^k (Sq)^k =$$

$$= \left\{ \begin{array}{l} x = -Sq \\ \alpha = -m \end{array} \right\} = p^m \cdot (1-Sq)^{-m} = \left(\frac{p}{1-Sq} \right)^m$$

$\mathbb{E} X$

$$\mathbb{D} X = \frac{mq}{p} \mathbb{D} X_1 + \frac{qm}{p^2} (\mathbb{E} X_1)^2$$

доказали $X_1 = Y_1 + \dots + Y_m$

Задача (*/4):

$$N \sim \Pi(0{,}8) \Leftrightarrow \mathbb{P}(N=k) = e^{-0{,}8} \frac{(0{,}8)^k}{k!}, \ k = 0, 1, \dots$$

$$X_i: \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \\ 0{,}25 & 0{,}375 & 0{,}375 \end{array}$$

$\mathbb{P}(X = x) \ x = 0, 1, 2, \dots 6 - ?$

$$X = \begin{cases} X_1 + \dots + X_N, & N \geq 1 \\ 0, & N = 0 \end{cases}$$

Задача (*/4)

$N \sim \Pi(2)$

$\mathbb{P}(X_1 = x) = 0{,}1 x \quad x = 1, 2, 3, 4$

$\mathbb{P}(X = x) \ x = 0, 1, 2, 3, 4 - ?$